Г. П. ЩЕДРОВИЦКИЙ,
(Институт дошкольного воспитания АПН РСФСР)
С. Г. ЯКОБСОН
(Москва)

К АНАЛИЗУ ПРОЦЕССОВ РЕШЕНИЯ ПРОСТЫХ АРИФМЕТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Сообщение I. Цели и проблемы исследования. «Косвенные» задачи

(Представлено членом-корреспондентом АПН РСФСР А. В. Запорожцем)

1. Развитие современного производства предъявляет все более высокие требования к самому человеку. Непрерывно растет тот минимум культуры, которым должен владеть производитель. Увеличивается объем необходимых для труда знаний. Постоянные перевороты в производстве, связанные со сменой профессий многих людей, требуют все более высокого уровня общего образования. Но достижение его при современном состоянии науки и методов обучения возможно только при значительном удлинении периода обучения и перегрузке учащихся. Ни то, ни другое практически недопустимо. Поэтому выход из сложившегося, довольно «острого» положения нужно искать на иных путях.

Одним из них является перестройка самой науки и изменение содержания учебных предметов. Сами знания должны быть «уплотнены». Их должно стать меньше, но при этом они должны охватывать более широкий и непрерывно расширяющийся круг объективных явлений. Структура знаний должна стать более простой, а алгоритмы их употребления менее громоздкими.

Другой путь сокращения продолжительности обучения — предельная рационализация самого процесса обучения. Здесь главным является переход к так называемым «активным» методам обучения и воспитания, которые позволили бы учащимся в более короткие сроки и с меньшими усилиями овладеть необходимыми знаниями и умениями (см. [5]).

Наконец, третий путь решения проблемы может заключаться в том, чтобы попытаться некоторые разделы школьной программы «сдвинуть» вниз, в дошкольное обучение или, во всяком случае, в дошкольном обучении подготовить определенную базу, которая облегчила бы и ускорила усвоение школьной программы. Этот путь вполне реален и значение его трудно переоценить.

Но осуществление всех этих мер по рационализации процесса обучения упирается прежде всего в ограниченность наших знаний о строении человеческой деятельности и, в частности, мышления. Поэтому первое условие и предпосылка всяких попыток практического решения вопроса — развертывание широкого круга логических, психологических и педагогических исследований строения человеческой деятельности.

2. Эти соображения определили цели настоящего исследования. Выбирая для него конкретный эмпирический материал и намечая общий план работы, мы исходили из следующих теоретических принципов.

1) Основу психического развития ребенка составляет *усвоение* элементов «культуры», накопленной человечеством, *овладение* общественно выработанными знаниями и способами деятельности, которые противостоят ему в виде средств производства, языка (понимаемого широко, как совокупность знаковых систем) и повседневной практики окружающего коллектива (см. [3]).

2) В силу предыдущего все знания и способы деятельности людей (в том числе мыслительные операции) необходимо рассматривать в двух, хотя и теснейшим образом связанных друг с другом, но тем не менее существенно различных планах:

а) По их *объективному* составу и структуре, которые только и могут обеспечить решение определенных задач: в этом отношении они выступают как *«трудовая норма»* и не зависят от субъективных средств отдельных индивидов. Это есть то, *что* усваивается, или то, *чем* овладевают.

б) С точки зрения тех действий, которые могут и должны осуществить индивиды, чтобы, исходя из определенных уже усвоенных знаний и способов деятельности, овладеть новым составом знаний и деятельностей, новой «нормой» (подробнее об этом см. [5]).

3) Овладение знаниями и способами деятельности (в том числе — мыслительными операциями) происходит только в определенной *системе*: любые знания и мыслительные операции могут усваиваться лишь после и на основе других, а сами, в свою очередь, образуют условия и предпосылки овладения какими-то иными, еще более сложными знаниями и операциями. Получается, что на протяжении всего обучения знания и мыслительные операции образуют как бы единую систему, в которой все элементы взаимосвязаны и зависят друг от друга, каждый предшествующий «слой» определяет характер последующего и все они в целом зависят от того, какие требования мы предъявляем к итогу всего этого обучения.

Из последнего принципа вытекает, в частности, что дошкольное воспитание и обучение нельзя рассматривать изолированно; оно является первым (по порядку) элементом всей системы воспитания и поэтому должно рассматриваться в зависимости от других, последующих элементов, в первую очередь — от системы обучения и воспитания младших школьников. Иначе говоря, дошкольное воспитание и обучение должны рассматриваться как подготовительный этап к воспитанию и обучению в младшем школьном возрасте. В частности, содержание дошкольного воспитания и обучения непосредственно определяется содержанием воспитания и обучения в начальной школе.

Поэтому чтобы выяснить содержание дошкольного обучения хотя бы в какой-то узкой области, мы должны были начать с анализа «верха», того, к чему это дошкольное обучение подготовляет. Мы выделили процессы решения арифметических задач в I классе, предполагая, что они являются одним из видов «синтетической» мыслительной деятельности, концентрирующим в себе многие из тех умений, навыков, знаний, которыми ребенок должен овладеть в дошкольный период.

Мы должны были проанализировать процессы решения арифметических задач таким образом, чтобы выделить в них не только строение и состав уже «сложившейся» деятельности, но и те знания и мыслительные операции, которые являются необходимыми условиями и предпосылками ее «складывания», т. е. ее усвоения. Это была первая задача. А вторая заключалась в том, чтобы определить субординацию и координацию всех выявленных в ходе анализа знаний и операций и таким путем наметить (в первом приближении) порядок и последовательность расположения соответствующего учебного материала. В дальнейшем должна быть поставлена третья задача: определить структуру той «субъективной» деятельности детей, посредством которой они овладевают общественно фиксированными знаниями и способами деятельности, «нормой». Четвертая задача, которая встанет после решения первых трех, будет состоять в исследовании деятельности педагога при обучении всем этим знаниям и мыслительным операциям. Решение указанных четырех задач позволит построить рациональные и эффективные методики дошкольного обучения, учитывающие как логические и психологические, так и дидактические факторы процесса обучения и воспитания.

3. Для учеников I, а нередко и II класса значительную трудность представляют задачи, где описываемый по вещественной ситуации процесс как бы «расходится» по содержанию или «смыслу» с тем действием, которое надо произвести с числами, чтобы получить решение. К примеру, по ситуации определенное количество вещей получилось из о б ъ е д и н е н и я двух совокупностей, а находить надо число, характеризующее о д н у из этих совокупностей, и притом, — путем в ы ч и т а н и я. Или наоборот: по ситуации из совокупности предметов в ы д е л и л и или отделили часть, а находить надо число, характеризующее в с е это количество, и притом — путем с л о ж е н и я.

Мы решили обратить на эти задачи особое внимание, так как анализ их, бесспорно, помог бы выяснить как особенности самих объективных способов решения, так и недочеты в обучении. Типичными для целого ряда детей были такие ответы:

Сережа Б., II класс, октябрь

Эксп.: Из бочки вычерпали 6 ведер воды и там осталось 9 ведер. Сколько ведер воды было в бочке? *Сережа:* Сколько вынули? *Эксп.:* 6. *Сережа* (шепчет): 9 и 6... Не получается ... 3 ведра было, что ли?

Валерик Х., II класс, сентябрь

Эксп.: В детском саду было 14 мячей. Из них 10 черных, остальные белые. Сколько было белых мячей?

Валерик (прочитав еще раз задачу): Понятно уже $14+10=24$. Правильно?

Заметим сразу, что задачи, в которых нет такого «расхождения» между «смыслом» процессов по вещественной ситуации и «смыслом» арифметических действий, например, такие, когда от общего количества отделили часть и нужно путем вычитания найти числовую характеристику оставшейся части или когда объединили две совокупности и нужно путем сложения найти числовую характеристику общего количества, эти же ученики решают легко.

Из этого можно заключить, что причина затруднений с задачами указанного выше типа, лежит не в том, что вообще не «освоены» арифметические действия сложения и вычитания, и не в том, что они освоены формально, без какого бы то ни было понимания. Во всяком случае, если эти действия и не освоены, или не понимаются, то с такой стороны, которая раскрывается только в задачах указанного выше типа.

4. Затруднения, которые испытывают учащиеся при решении подобных задач, давно привлекают внимание методистов и психологов; эти задачи получили даже особое название — «косвенных».

1) Д. Д. Галанин в «Методике арифметики» [1] специально оговаривает те трудности, которые могут представить для детей задачи, где требуется вычитанием найти «неизвестное слагаемое». Он объясняет их тем, что в задачах на нахождение «неизвестного слагаемого» нет слова (!), которое может быть заменено знаком «минус». Поэтому этот знак должен быть поставлен учащимися «по смыслу задачи» или, как пишет Галанин, «по определению действия как обратного сложению» [1, стр. 64].

Для того, чтобы стало понятным это объяснение и вообще весь ход мысли Д. Д. Галанина, надо изложить его понимание деятельности учащихся при решении обычных, не косвенных задач. Рассматривая, несколькими параграфами выше, обучение «понятиям сложения и вычитания», Галанин пишет, что для решения прямых задач требуется п о д в е д е н и е выражений словесной речи, обозначающих изменения в предметных совокупностях, («нашли», «получили», «отсыпали», «проиграли») под одно из математических понятий — «прибавления» или «увеличения» и «отнимания» или «уменьшения» и обозначения этого понятия соответствующим математическим знаком [1, стр. 58, 59].

Уменье решать задачи, с точки зрения этого понимания, является результатом и н д у к т и в н о г о о б о б щ е н и я смысла или значения различных словесных выражений, обозначающих изменение отношений между частями предметных совокупностей (или действия, вызывающие такие изменения). Соответственно, работа учителя должна заключаться в том, чтобы умелым подбором задач и указанием на сходство различных действий (с точки зрения того, приводят ли они к уменьшению или увеличению исходного количества) помочь детям совершить это обобщение и тем самым овладеть определенным способом решения задач.

Совершенно очевидно, что косвенные задачи решить таким способом невозможно, кстати,— так же, как и все другие, в которых нет действий увеличения или уменьшения исходной совокупности и обозначающих их слов. Тогда-то и появляется это знаменательное положение о том, что решение косвенных задач должно производиться на другой основе, что выбор знака и, соответственно, математического действия в косвенных задачах должен производиться «п о с м ы с л у з а д а ч и».

Но можно спросить: что такое «смысл задачи»? Из чего он складывается? Что именно должен знать и понять ребенок, чтобы схватить «смысл» косвенной задачи?

По мнению Д. Д. Галанина, решение косвенных задач должно производиться на основе понимания определенных *математических отношений*. Он пишет, что эти задачи нужно объяснять так, «чтобы у учеников создалось представление о том, что дана сумма двух количеств и одно из них, и, чтобы получить другое, надо первое вычесть из суммы» [1, стр. 64]. Именно отсюда следует второе из приведенных нами выше замечаний, что вычитание в подобных задачах определяется как действие «обратное сложению» [1, стр. 64].

В связи с планом дальнейшего анализа мы хотим особенно отметить три момента в концепции Галанина.

Первый. Анализируя процесс решения обычных, не косвенных задач, Галанин ничего не говорил о понимании. Там весь процесс обучения строился, по-видимому, на выработке определенных ассоциаций, а процесс решения задачи выступал как применение этих ассоциаций.

Второй. Понимание, необходимое при решении косвенных задач, Галанин охарактеризовал только с точки зрения содержания (надо знать, что даны сумма двух количеств и одно из этих количеств); он ничего не сказал о механизме этого понимания и не показал, как нужно обучать этому пониманию.

Третий. Для решения прямых и косвенных задач Галанин предлагает два различных метода. Но если первый, предлагаемый им способ имеет такое узкое приложение и неприменим для решения косвенных задач, то, может быть, он вообще не является *действительным* методом, вообще ошибочен, и нужно искать иной метод, который был бы применим для всех без исключения арифметических задач?

2) В «Методике преподавания арифметики в начальной школе» И. Н. Кавуна и Н. С. Поповой [2] то понимание механизма деятельности ребенка, которое у Д. Д. Галанина лишь проглядывало, формулируется уже совершенно отчетливо и резко. Они прямо утверждают, что в арифметических задачах выбор действия и решения совершаются на основе создания «ассоциации между терминами прибавить и отнять и теми разнообразными выражениями, которые характеризуют действия сложения и вычитания в задачах» [2]. Предлагаемая ими методика обучения, естественно, строится в соответствии с этим принципом.

3) Л. Н. Скаткин [4] также уделяет интересующим нас задачам особое внимание и подчеркивает их трудность для детей. В своей классификации простых задач он называет их «задачами, выраженными в косвенной форме» или «взаимообратными» по отношению к простым задачам на нахождение суммы или разности.

При решении простых задач выбор действия, по его мнению, происходит «на основе жизненного опыта ученика, по аналогии с тем, как приходилось узнавать, сколько предметов получится, когда несколько предметов надо придвинуть или отодвинуть» [4, стр. 12]. При решении косвенных задач нужное действие, напротив находится путем рассуждения. Это рассуждение позволяет глубоко проникнуть в смысл задачи и на основе этого решить ее. Причиной неправильного решения задач, соответственно, является неуменье детей рассуждать и проникать в смысл задачи.

Если попытаться представить себе то теоретическое понимание деятельности ребенка по решению задач, исходя из которого можно выдвигать подобные положения, то придется признать, что оно по существу совпадает с тем теоретическим пониманием, которое было у Галанина, и отличается от последнего лишь меньшей четкостью и законченностью.

Действительно, установление аналогии между описываемыми в задаче действиями и действиями по «придвиганию» или «отодвиганию» предметов означает по существу то же подведение этих действий под более широкую пару понятий, какое было у Д. Д. Галанина, с той лишь разницей, что понятия «увеличения» и «уменьшения», выступавшие в этой роли у Галанина, имеют более обобщенный характер, чем понятия «придвигания» и «отодвигания», используемые Л. Н. Скаткиным.

В основании этой гипотезы о подведении лежит по существу такое же понимание процесса выработки уменья решать задачи, какого придерживались Галанин и другие методисты. Этот процесс понимается как индуктивное обобщение значения или смысла различных выражений, обозначающих предметные отношения между частями совокупностей.

Правда, Л. Н. Скаткин, по-видимому, осознает недостаточность этого понимания. В частности, он критикует приведенное выше положение из методики И. Н. Кавуна и Н. С. Поповой, справедливо отмечая, что именно использование указанной выше ассоциации приводит к тому, что дети делают ошибки при решении задач, выраженных в косвенной форме. Но он не отвергает этого принципа в целом, не говорит, что механизм решения задач должен быть по существу иным, а принимает его в общем, считая, что он должен быть лишь дополнен «глубоким проникновением» детей в смысл задачи.

Наконец, так же как и Галанин, Л. Н. Скаткин считает необходимым условием решения косвенных задач понимание их «смысла», однако остается совершенно неясным: а) что такое *смысл* задачи, б) что такое *понимание* смысла, в) как учить этому пониманию?

4) Наконец, тезис о том, что дети, которые неправильно решают косвенные задачи, не понимают их смысла, вызвал у нас сомнения еще с одной стороны.

Уже в 1915 г. Ф. А. Эрн [7] отмечал следующий любопытный факт: решая задачи, выраженные в косвенной форме, некоторые дети дают правильный ответ, но неверно записывают решение задачи. Сам Эрн объяснял этот факт тем, что ученики придают слишком большое значение «внешней форме» условий задачи и не привыкли вдумываться в их «внутренний смысл». Именно это, по его мнению, помешало им вполне выяснить понятие о действиях сложения и вычитания.

На наш взгляд, это очень важное наблюдение, но совершенно неправильное объяснение. Совершенно очевидно, что невозможно получить правильный ответ на вопрос задачи, не «вдумываясь в нее» и не понимая «внутреннего смысла» ее условий. Более того, тот факт, что ребенок правильно решает задачу, позволяет сделать вывод, что он не только понимает ее смысл, но и имеет определенный способ решения. То, что ребенок при этом не может правильно выбрать арифметическое действие и, соответственно, правильно записать решение, говорит, на наш взгляд, о каких-то более сложных явлениях, чем простое непонимание смысла, требующих более тщательного анализа.

5. В своих замечаниях Ф. А. Эрн описывает задачу, в которой даны «вычитаемое» и «остаток» и нужно (путем сложения их) найти уменьшаемое. Прежде всего мы решили выяснить, существует ли подобное же расхождение между ответом и арифметической записью решения в косвенных задачах другого вида. Вместе с тем мы хотели проверить, действительно ли при неуменьи решить задачу имеет место непонимание смысла ее условий.

Уже первые наблюдения, проведенные в этом направлении, показали, что неверное решение задачи может быть совсем не связано с непониманием ее условий.

Например, ученику II класса *Сереже Б.*, слабо успевающему по арифметике, в октябре предлагается задача:

«Для украшения елки ученики I класса сделали 20 игрушек; из них 6 — из бумаги, а остальные — из картона. Сколько игрушек они сделали из картона?»

Сережа решает ее неверно: «20+6=26». Однако последующая беседа показывает, что это неправильное решение отнюдь не является следствием непонимания им описываемой в задаче предметной ситуации.

Эксп.: Сколько сделали игрушек? *Сережа:* Двадцать. *Эксп.:* Из чего их сделали? *Сережа:* Из картона и бумаги. *Эксп.:* Сколько сделали из бумаги? *Сережа:* Шесть. *Эксп.:* А остальные из чего сделали? *Сережа:* Из картона. *Эксп.*: Каких игрушек было больше — всех вместе или одних картонных? *Сережа:* Всех было больше. *Эксп.:* Сколько же игрушек сделали из картона? *Сережа* (пишет): 20+6=26.

Таким образом, мальчик не только знает, что картонные игрушки входили в число всех сделанных игрушек, но и понимает, что всех сделанных игрушек было больше, чем одних картонных, т. е. казалось бы, он понимает даже, что картонные игрушки составляли часть всех сделанных, и тем не менее продолжает решать задачу неверно.

Подобных протоколов можно было бы привести очень много. И они уже достаточно подтверждают выдвинутый выше тезис. Однако еще более яркими и разительными являются другие случаи, когда дети совершенно правильно решают задачу и неправильно записывают ее решение или выбирают арифметическое действие.

Ученикам I класса в декабре месяце предлагается задача:

«Коля должен сделать 8 флажков. Он сделал 4 флажка. Сколько флажков ему еще осталось сделать?»

Задача прочитывается два раза, после чего трое детей рассказывают классу ее условие. Учительница спрашивает, сколько флажков осталось сделать Коле. 16 человек поднимают руку. Все они дают верный ответ: 4 флажка. На следующий вопрос, который задавался только сильным ученикам: «Как узнать, сколько флажков осталось сделать Коле?» были получены такие ответы:

Витя К.: К 4 прибавить 4. *Лена Ф.:* К 8 прибавить 4. *Саша С.:* К 4 прибавить 4. *Ира О.*: Число 8 состоит из 4 и 4. *Толя Б.:* Прибавлять 4 единицы к 4 единицам. *Алеша Л.:* 4 прибавить еще 4, получится правильный ответ 8. *Таня С.:* Он сделал 4, еще ему осталось сделать 4. *Вера К.*: К 4 единицам добавлять до 8. *Гена З.:* 8 отнять 4.

О том, что эти ответы детей отнюдь не являются бездумным повторением случайного неверного ответа товарища, говорит и следующий любопытный эпизод. В том же классе через несколько дней была предложена задача:

«Для украшения елки ученики I класса сделали 20 игрушек; из них 6 — из бумаги, а остальные — из картона. Сколько игрушек они сделали из картона?»

Один из детей на вопрос учительницы, как узнать, сколько игрушек сделали из картона, ответил: «от 20 отнять 6». Но все остальные ученики класса дружно ахают и в один голос произносят: «Наоборот». Их собственные предложения в данном случае: «...Нужно было бы посчитать». Верный с нашей точки зрения способ решения задачи, предложенный первым мальчиком, представляется им совершенно нелепым.

Эти наблюдения, во-первых, дают возможность утверждать, что неуменье выбрать правильное арифметическое действие или правильно записать решение не связано необходимо с непониманием условий задачи.

Во-вторых, они дают возможность предположить, что дети имеют «свои» строго определенные способы решения задачи, но эти способы отличаются от тех, какими мы, взрослые, решаем эти задачи.

В-третьих, они заставляют нас расчленить само понятие «понимания». Если дети хорошо понимают предметную ситуацию, описываемую в задаче, отношения между частями предметной совокупности, и тем не менее не могут правильно выбрать необходимое арифметическое действие, то, по-видимому, существует несколько различных «пониманий» условий задачи и, естественно, несколько различных «смыслов» в самой задаче; одни из них соответствуют тем способам, какими решают задачу дети, а другие — общественно-фиксированному математическому способу, тому, который мы взрослые уже усвоили и с помощью которого решаем эти задачи.

6. Эти выводы ставят перед нами **три основных задачи исследования**. Мы должны выяснить:

1) Что представляют собой те способы решения арифметических задач, которые применяют дети? В каких условиях и для решения каких задач они сформировались?

2) Что представляет собой наш современный математический способ решения этих задач? В каких условиях и для решения каких задач он сформировался?

3) Как научить детей этому общественно-фиксированному способу решения арифметических задач?

ЛИТЕРАТУРА

1. Д. Д. Галанин. Методика арифметики. Первый год обучения. М., 1910.
2. И. Н. Кавун и Н. С. Попова. Методика преподавания арифметики в начальной школе. М., 1934.
3. А. Н. Леонтьев. О социальной природе психики человека. «Вопросы философии», 1961, № 1.
4. Л. Н. Скаткин. Обучение решению простых арифметических задач. 1954.
5. Г. П. Щедровицкий. К анализу процессов решения задач. «Доклады АПН РСФСР», 1960, № 5.
6. Ф. А. Эрн. Очерки по методике арифметики. Рига, 1915.

Поступило 10. I 1962 г.

ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК РСФСР, № 3, 1962

Г. П. ЩЕДРОВИЦКИЙ
(Институт дошкольного воспитания АПН РСФСР)
С. Г. ЯКОБСОН

К АНАЛИЗУ ПРОЦЕССОВ РЕШЕНИЯ ПРОСТЫХ АРИФМЕТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Сообщение II. Способы решения и содержание арифметической задачи

(Представлено членом-корреспондентом АПН РСФСР А. В. Запорожцем)

Способы решения, применяемые детьми до овладения сложением и вычитанием

1. Известно, что в решении так называемых «косвенных» арифметических задач многие ученики I и II классов допускают характерные ошибки: там, где по «смыслу» задачи надо складывать, они вычитают, а там, где математический «смысл» задачи требует вычитания, они, наоборот, складывают. Анализируя процессы решения задач (см. [5]), мы убедились, что попытки объяснить эти ошибки тем, что дети *не понимают* «предметного смысла» подобных задач, слишком поверхностны. При этом мы выделили случаи — довольно частые, — когда дети почти сразу же дают правильный ответ на вопрос задачи, но, одновременно, неправильно записывают решение и затем дают второй, неправильный ответ, подчиняясь уже логике произведенной записи. Эти факты позволили нам заключить, что дети имеют какие-то «свои» способы решения подобных задач, отличные от нашего общественно-фиксированного способа решения *путем сложения и вычитания.* Встала задача—проанализировать их.

2. Способ (или механизм) решения задачи часто не так-то просто выявить. Типичными являются, например, такие ответы:

Костя Б., I класс, сентябрь

Эксп. У Иры было 8 марок, желтых и синих. Желтых было 4. Сколько синих марок было у Иры? *Костя* (*шепчет про себя*) 8, 4. (*Через несколько секунд говорит.*) Так я знаю; я уже забыл; 4 и 4 будет 8, значит, и синих было 4.

Саша Б., I класс, сентябрь

Эксп. В двух клетках сидят 8 кроликов. В одной клетке 5 кроликов. Сколько кроликов в другой клетке? *Саша.* Три. *Эксп.* Как ты узнал? *Саша.* Я подумал и узнал. *Эксп.* Ты считал? *Саша.* Нет, я подумал и узнал.

Понятно, что подобные наблюдения ничего не дают нам для выяснения действительного механизма деятельности. Поэтому приходится искать такие случаи, когда задача вызывает у ребенка затруднения, и он, чтобы решить ее, вынужден экстериоризировать имеющийся у него способ решения. Иногда для выявления способа решения удается использовать дополнительные отчеты детей.

3. Анализ более чем 40 случаев отчетливо выраженного решения задач позволил наметить три разновидности или варианта способа решения, применяемого детьми.

А. Восстанавливаются (чаще всего на пальцах, иногда на кубиках, счетных палочках и других предметах) предметные совокупности, описанные в условиях, а затем задачи решаются с помощью счета. Вот характерные примеры:

Саша Ш., I класс, сентябрь

Эксп. На тарелку положили сливы. Девочка съела 6 штук и осталось еще 3. Сколько слив положили на тарелку? *Саша.* Трудная, не поймешь. *Эксп.* (*Повторяет условия.*) *Саша.* (*Отгибает 3 пальца; потом, прикладывая по одному пальцу к носу, отгибает еще 6; посмотрел на них.*) Девять.

Миша У., I класс, октябрь

Эксп. Было 7 пирожков. Ребята съели несколько штук и осталось 4 пирожка. Сколько пирожков съели ребята? *Миша.* (*Как только экспериментатор начал говорить, отогнул 7 пальцев.*) 3 пирожка они съели. *Эксп.* Как ты узнал? *Миша.* 4 пальца вот так сложил (*отводит 4 пальца, прижатых друг к другу*), а 3 — так (*сцепляет большой палец одной руки с большим и указательным пальцем другой*).

Б. Предметные совокупности, описанные в условиях задачи, ни в каких предметах не восстанавливаются; считаются цифры числового ряда. Вот примеры:

Саша Б., I класс, сентябрь

Эксп. В коробке 9 карандашей. 5 карандашей красные, остальные — зеленые. Сколько зеленых карандашей в коробке? *Саша* (*Шепчет что-то про себя. Через 41 сек. отвечает.*) 4 карандаша. *Эксп.* Как ты узнал? *Саша.* Посчитал. *Эксп.* Как же ты посчитал? *Саша.* 6 — 1, 7 — 2, 8 — 3, а 9 — 4.

Владик А., I класс, октябрь

Эксп. На полке стояло 7 стаканов. Потом несколько стаканов разбили и осталось 2 стакана. Сколько стаканов разбили? *Владик.* (*Через 38 сек.*) Пять. *Эксп.* Как же ты считал? *Владик.* 1, 2, 3, 4, 5. *Эксп.* Как же ты узнал, что надо остановиться? Может быть надо считать дальше? *Владик.* А дальше будет 6 и 7 — два.

(Этот второй пример несколько отличается от первого, но мы сознательно относим его к тому же варианту решения. Подробнее об этом речь будет идти в одном из следующих сообщений.)

В. Как и в предыдущем случае движение идет исключительно по числовому ряду, но это не счет цифр, а нечто напоминающее сложение и вычитание; вот пример:

Женя Г., I класс, декабрь

Эксп. У девочки было 5 карандашей, ей дали еще несколько и стало 9. Сколько ей дали? *Женя.* Четыре. *Эксп.* Как ты считала? *Женя.* Я к 5 прибавила 2 и еще 2.

(Таких случаев с прибавлением и отниманием по 2 было несколько: в одном случае ребенок прибавлял и отнимал по 3.)

Получив несколько различных вариантов способов решения задач детьми, мы должны были определить, с какого из них надо начинать исследование. Основанием для этого, в свою очередь, могли служить лишь определенные соображения относительно генетических связей между этими способами деятельности. Мы предположили, что генетически первичным является вариант *А*, а варианты *Б* и *В* складываются как его дальнейшее преобразование и развитие. При этом мы исходили из того, что первый способ деятельности ближе всего к простому пересчету предметных совокупностей и поэтому мог естественно сложиться как его непосредственное развитие. Таким образом, перед нами встала задача — проанализировать способ решения арифметических задач, основанный на восстановлении (или моделировании) предметных совокупностей, описанных в условиях, и счете.

Счет и предметные преобразования совокупностей. Структура задачи

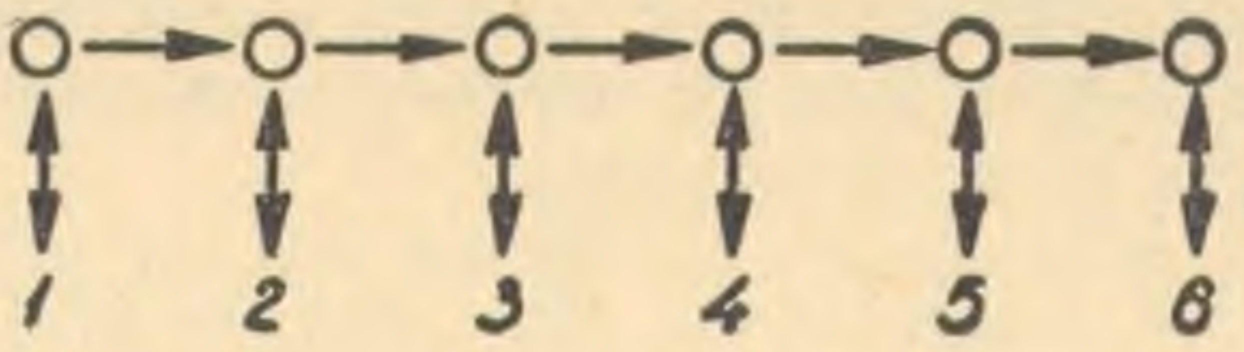
1. Теоретическую основу анализа составили понятия и принципы *содержательно-генетической логики* (см. [1], [6]), в частности, идея органической связи двух аспектов, в которых может рассматриваться мышление, — *«знаниевого»* и *«процессуального»* (см. [1], [2]), понимание знания как *связи замещения* операций с объектами знаками (см. [2, I], [3, I] и, в силу этого, как *двухплоскостного образования,* не подчиняющегося *принципу параллелизма формы и содержания* (см. [3]). Логический анализ, опирающийся на эти принципы, позволил рассмотреть деятельность по решению задач как *«норму» или «способ» решения,* что является необходимой предпосылкой психологического анализа всей учебной деятельности детей (см. [4]) и собственно педагогического анализа (в узком смысле слова) обучающей деятельности педагога.

2. Исходной компонентой выделенного способа решения задач является счет—это предположение послужило основанием для квалификации самого этого способа как генетически первичного. Анализ счета как особой мыслительной деятельности и логической структуры числового ряда—особая задача, выходящая за рамки настоящего исследования.

Здесь мы хотим затронуть — и притом очень бегло — лишь те вопросы, которые крайне необходимы в данном контексте.

Счет есть общественно-выработанный и общественно фиксированный способ решения определенных задач в *«предметной плоскости»*. Сами задачи выражаются в вопросах или заданиях особого вида и обязательно предполагают данность самих предметов — последнее обстоятельство мы и отмечаем, когда говорим, что это задачи предметной плоскости. Их всего три — две *частичные* и одна *целостная*.

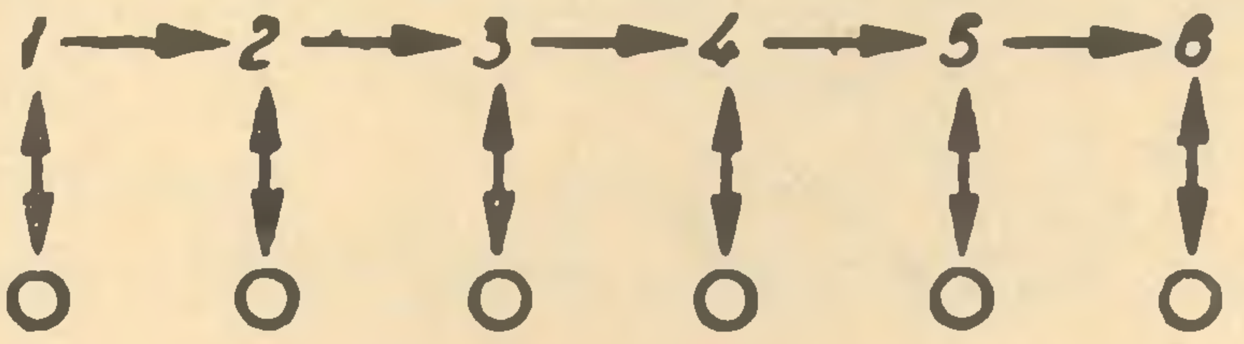
Первая частичная задача: «Сколько предметов (на этом столе, в этой комнате и т. п.)?», всегда — с четким указанием на пространственные и временные границы задаваемой области, причем предметы должны быть даны непосредственному восприятию. Сам процесс решения задачи есть *замещение* в определенном порядке предметов совокупности (или операций счета) цифрами; каждого — определенной цифрой:



(1)

а всей совокупности — определенным числом. Иначе, в схематической форме, этот процесс может быть представлен так: $X\Delta\ \overset{\uparrow (A)}{|}$, где X — совокупность предметов, (A) — цифры ряда, $\Delta\uparrow$ — «дельта-стрелка» — операция счета, включающая ряд *сопоставлений* (см. [1, стр. 44, 45]) и движений, изображенных на предыдущей схеме.

Вторая частичная задача: «Возьми или отбери из заданной совокупности столько-то предметов». Процесс решения — тот же счет, но с несколько иной связью между предметами и числом. Если в первой задаче реальное количество предметов в выделенной совокупности определяло, какое число у нас получится, то здесь, наоборот, заданное вначале число определяет выделяемую или создаваемую совокупность предметов. Можно сказать, что в определенном отношении операции, применяемые в первой и второй задаче, являются *взаимообратными*. Первую мы будем называть *пересчетом* (предметов), а вторую — *отсчетом* (предметов). Наглядно-схематически вторая операция будет изображаться так:



(2)

или $\underset{\downarrow\,\nabla}{(A)\,|}\ Y$, где (A) — цифры ряда, Y — отсчитываемая или *восстанавливаемая* совокупность, а $\downarrow\nabla$ («стрелка-набла») — операция отсчета.

Целостная задача: «Отложи или выдели среди предметов заданной совокупности столько же, сколько их имеется в другой совокупности». Решение этой задачи предполагает обе счетные операции — и пересчет и отсчет. Наглядно-схематически весь процесс будет изображаться соединением схем (1) и (2) или формулой $X\Delta\ \overset{\uparrow (A)\,|}{|\qquad \downarrow\nabla}\ Y$.

Специально отметим, что с логико-генетической точки зрения именно последняя, целостная задача является исходной; она возникает на чисто предметном уровне, формулируется примерно так: «Создать предметную совокупность Y, такую же, как предметная совокупность X» и решается первоначально другим способом, чем счет, по существу чисто предметным. Это будет операция, которая, если изображать ее наглядно-схематически, выглядит так:

В схематической форме решение подобных задач может быть так же изображено, как $X \to Y$. Лишь при определенных условиях, в так называемых «ситуациях разрыва», когда задача не может быть решена прежним способом, ее начинают решать иным, опосредствованным путем, применяя заместители (предметы или знаки). Именно в этих ситуациях появляется счет как особая деятельность, и процесс $X \to Y$ преобразуется в процесс $X\Delta \big|\overset{(A)}{\quad}\big|\!\downarrow \Gamma\, Y$. Но и при такой, усложненной структуре процесс решения исходной задачи — «создать предметную совокупность Y, такую же, как предметная совокупность X»,— остается первоначально одной целостной единицей, можно даже сказать, одной операцией, и лишь впоследствии разделяется на две операции, относительно самостоятельные и, казалось бы, в значительной мере независимые друг от друга. Продукт первой операции — определенное число,— который первоначально не имел никакого практически-предметного смысла сам по себе и был лишь промежуточным средством в решении практически-предметной задачи, который, в силу этого, выступал как незначительный и малонужный, теперь, в связи с разделением деятельности, превращается в самостоятельную ценность; он становится тем продуктом, к которому стремятся ради него самого.

Это изменение в значении знака — превращение его из промежуточного средства в особый продукт — выступает одновременно как процесс выделения (и осознания) особых задач. которые становятся не менее важными, чем исходные практические; «Определи, сколько здесь предметов!», «Отдели столько предметов, сколько указано в этом числе!» — вот формулировки этих новых задач, и они существенно, хотя на первый взгляд и малозаметно отличаются от исходных. Выделение подобных задач завершает процесс отделения (в данной области) *познавательных операций* от *практических*. Первые дают в качестве своего продукта определенное *знание*, т. е. $X\Delta \big|^{(A)}$, вторые — определенную *предметную совокупность, построенную на основе знания*,— $(A)\big|\!\downarrow \nabla\, Y$. В разбираемом случае познавательная операция — пересчет, практическая — отсчет. Весь этот процесс теснейшим образом связан также с разделением труда, т. е. с распределением различных частей исходной операции между разными людьми. Один пересчитывает заданную предметную совокупность, а другой, получив продукт деятельности первого — число, отсчитывает по нему «такую же» совокупность. Можно сказать, что только в этом процессе разделения деятельности между разными людьми и происходит выделение и обособление промежуточных продуктов и выделение особых задач получения этих продуктов.

3. Счет как особая деятельность, направленная на решение описанных выше задач, «накладывается» на другую предметную деятельность по преобразованию совокупностей — объединение и разделение их, подчиняется ей и начинает «работать» в ее контексте.

Наглядно схематически два существующих здесь предметных преобразования—разделение и объединение—могут быть изображены так:

$$X \to y\;\; z \quad \text{и} \quad y\;\; z \to X.$$

Они определенным образом структуируют действительность, создавая две предметные ситуации, резко разделенные между собой во времени: пока есть одна ситуация, скажем, до начала преобразования, не может быть другой, когда же возникла вторая ситуация — после преобразования, то уже не может быть первой. К примеру, если мы разделили совокупность X на две части, то когда было целое, не было частей, когда же есть части, то уже нет целого. То же самое и при объединении двух совокупностей в одну. Наглядно-схематически складывающиеся при этом отношения могут быть изображены так:

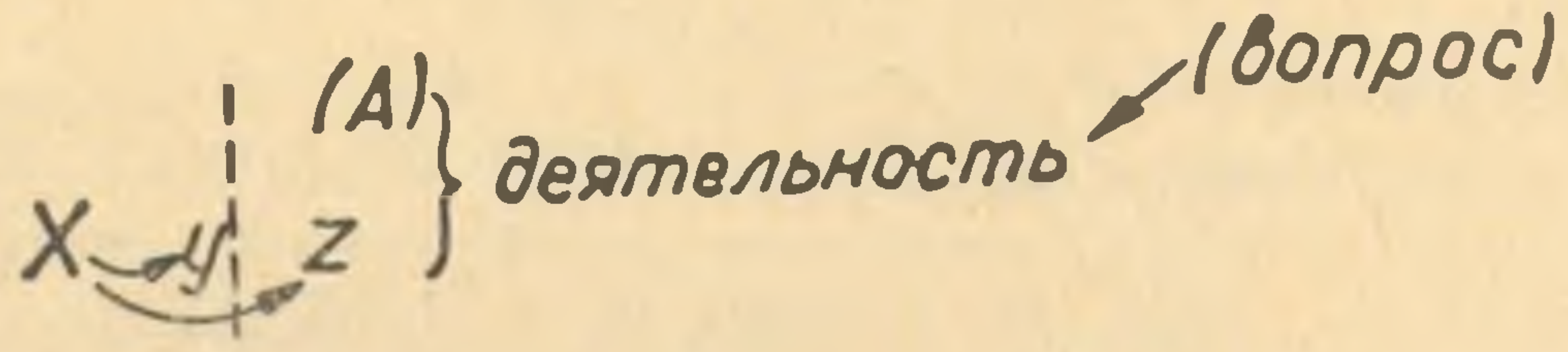
$$y\;\; z \mid X, \quad X \mid y\;\; z, \quad X\;\; y \mid z. \qquad (3)$$

(Вертикальная штриховая черта во всех этих формулах изображает пространственно-временную границу *ситуаций*. Последняя формула соответствует тому случаю, когда, в процессе разделения исходного целого на части, одна из частей исчезает и во вторую ситуацию актуально попадает только одна часть.).

В практической деятельности, однако, существует целый ряд задач, которые заставляют определенным образом сопоставить то, что получилось во второй ситуации, с тем, что было в первой. Например, в первом варианте преобразований (3) такая необходимость может возникнуть в связи с вопросом, какую часть от целого X внесли участники A и B, или в связи с вопросом, не изменилась ли общая количественная характеристика совокупности при объединении y и z. Во 2-м варианте может возникнуть подобный же вопрос, но теперь уже относительно разделения X на части, и т. д. Во всех этих случаях, чтобы ответить на вопросы, нужно *сопоставить* вторую ситуацию с первой.

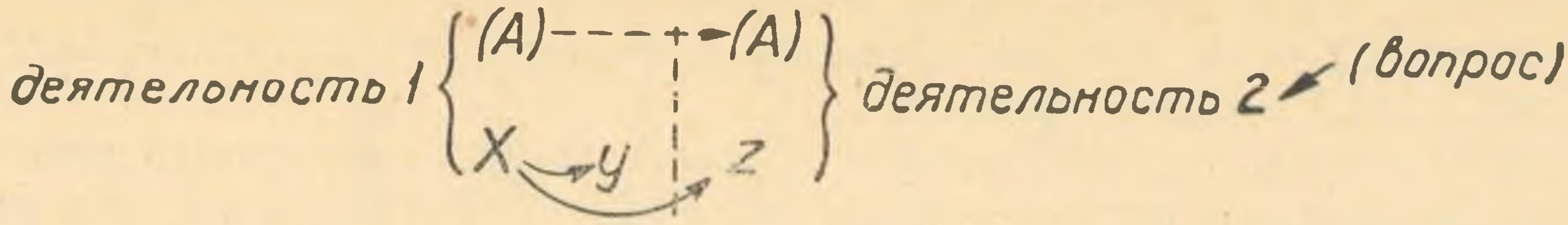
Но такое сопоставление возможно только в том случае, если от первой ситуации что-то остается и переходит во вторую. В принципе должно произойти невозможное: должна сохраниться и перейти во вторую ситуацию вся первая. Но это, как мы уже подчеркивали выше, невозможно: если есть первая, то не может быть второй, а если есть вторая, то уже не может быть первой. Выход находится на пути введения *заместителей* (предметов или знаков): первая ситуация не может сохраниться, она исчезает, превращаясь во вторую, но от нее должны сохраниться и перейти во вторую какие-то заместители или представители; они должны быть такими, чтобы с их помощью можно было бы осуществить необходимое сопоставление ситуаций. Важно заметить, что именно этим определяется отношение в ситуации между объектами и их заместителями: заместители являются таковыми лишь относительно проблемы, и они отражают, несут в себе или, иначе, «передают» лишь те свойства объектов, которые необходимы для определенного, заданного задачей сопоставления.

В зависимости от того, какой вопрос стоит при одном и том же предметном преобразовании и какие из возможных заместителей первой ситуации мы имеем, получаются различные задачи. Заместители первой ситуации и элементы второй образуют в данном случае *условия* задачи. *Условия практически-предметной задачи,* таким образом, это те предметы второй ситуации и те заместители первой ситуации, которые позволяют так сопоставлять то и другое, чтобы можно было ответить на вопрос задачи. Сопоставление предметных элементов второй ситуации со знаковыми заместителями первой является определенной *деятельностью,* причем не такой уж простой: ведь сопоставлять число непосредственно с предметной совокупностью невозможно; значит, эта деятельность, во всяком случае, должна содержать ряд операций. Кроме того она находится, по-видимому, в определенной зависимости от вопроса. Наглядно-схематически это можно изобразить так:



(Здесь (A) — число, определяющее, к примеру, количество элементов в совокупности X, а фигурная скобка рядом с выражением «деятельность» указывает на то, что производится определенное сопоставление).

Но заместители, переходящие во вторую ситуацию из первой, должны быть предварительно получены там. И это тоже была определенная деятельность, причем особого рода, с самого начала предназначенная именно для создания заместителей, переносимых во вторую ситуацию. Если учтем этот момент, то наша формула примет такой вид:



Важно здесь специально отметить, что «деятельность 2», посредством которой осуществляется сопоставление предметных и знаковых элементов второй ситуации, зависит от трех моментов: 1) характера предметного преобразования совокупности, 2) вопроса, определяемого более широкой жизненной и, в частности, производственной ситуацией, 3) характера тех заместителей, которые были получены в первой ситуации и перешли во вторую. «Деятельность 1», посредством которой в первой ситуации получаются заместители, в свою очередь зависит также от трех моментов: 1) характера предметного преобразования совокупности, 2) возможного характера «деятельности 2» и, таким образом, опосредованно также и от вопроса, 3) некоторых случайных обстоятельств, определяемых более широкой жизненной ситуацией, например, — не удалось создать заместителя всей совокупности X, но зато можно было получить заместитель части y, и т. п.

Нам в этой системе зависимостей особенно важно подчеркнуть: 1) существование зависимости «деятельности 1» от «деятельности 2», того, что совершается раньше, от того, что будет потом; 2) опосредствующую роль той части условий, которая представлена знаковыми заместителями; именно она связывает деятельности 1 и 2 в одну целостную деятельность по решению определенной практически-предметной проблемы, и, следовательно, по своему строению, должна быть такой, чтобы обеспечить эту связь; другими словами, эта часть условий задачи выполняет определенную функцию в деятельности и ее строение должно быть подчинено этой функции.

4. Если условия задачи могут обеспечить связь между деятельностями 1 и 2, то становится в принципе возможным разделение этих деятельностей и распределение их между разными людьми: один тогда может только создавать заместители в первой ситуации, а второй в другое время и в другом месте только сопоставлять их с предметной совокупностью второй ситуации и отвечать на вопрос задачи. Это становится вполне возможным и реальным, если мы дополним еще условия задачи, введя туда описание предметных преобразований совокупностей: это позволит второму человеку реконструировать предметную часть первой ситуации, правильно отнести данную ему предметную совокупность к другим, бывшим в первой ситуации, и на основе этого правильно выбрать тип сопоставления данных ему предметных совокупностей со знаковыми заместителями других. Без такого дополнения, в условиях распределения практически-предметной деятельности между разными людьми, решение задачи невозможно, так как второй человек, не наблюдавший непосредственно предметного преобразования совокупностей, не может даже квалифицировать заданную ему совокупность: она в равной мере может быть как частью, так и всем целым. Дополнение условий задачи описанием предметных преобразований совокупностей приближает задачу к той ее учебной форме, с которой мы сейчас обычно имеем дело (хотя это приближение и не полное, так как еще присутствует предметный элемент z).

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. П. Щедровицкий и Н. Г. Алексеев. О возможных путях исследования мышления как деятельности. «Доклады АПН РСФСР», 1957, № 3.

2. Г. П. Щедровицкий. О строении атрибутивного знания. Сообщения I, V, VI. «Доклады АПН РСФСР», 1958, № 1; 1959, № 4; 1960, № 6.

3. Г. П. Щедровицкий, Н. Г. Алексеев и В. А. Костеловский. Принцип «параллелизма формы и содержания мышления» и его значение для традиционных логических и психологических исследований. Сообщения I—IV. «Доклады АПН РСФСР», 1960, № 2 и № 4; 1961, № 4 и № 5.

4. Г. П. Щедровицкий. К анализу процессов решения задач. «Доклады АПН РСФСР», 1960, № 5.

5. Г. П. Щедровицкий, С. Г. Якобсон. К анализу процессов решения простых арифметических задач. Сообщение I. «Доклады АПН РСФСР», 1962, № 2.

6. Г. П. Щедровицкий. О различии исходных понятий формальной и содержательной логик. Матер. Томской конф. по логике и методологии науки. Томск, 1962.

Поступило 9.III 1962 г.

Г. П. ЩЕДРОВИЦКИЙ
(Институт дошкольного воспитания АПН РСФСР)
С. Г. ЯКОБСОН
(Москва)

К АНАЛИЗУ ПРОЦЕССОВ РЕШЕНИЯ ПРОСТЫХ АРИФМЕТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Сообщение III. Варианты решения «предметно заданных» задач

(Представлено членом-корреспондентом АПН РСФСР А. В. Запорожцем)

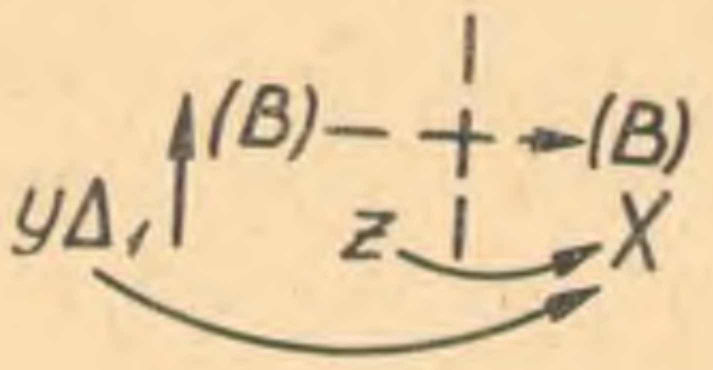
1. Анализируя причины тех затруднений, которые испытывают учащиеся I класса при решении простых арифметических задач, мы обнаружили, что, помимо общепринятого стандартного способа решения путем сложения и вычитания чисел, существует по меньшей мере еще три различных способа решения этих задач: а) путем предметного моделирования описываемых в задаче совокупностей и пересчета их, б) путем пересчета цифр числового ряда, в) путем «прибавления» или «отнимания» цифр числового ряда по две и по три. Первый способ решения — путем предметного моделирования и пересчета — был выделен нами как *генетически первичный;* от него (в условиях существующего обучения) дети переходят ко второму и третьему из названных способов или непосредственно к общественно фиксированному стандартному способу. Но и сам этот генетически первичный способ решения является уже достаточно сложным: к нему дети приходят тоже постепенно, от еще более простых способов деятельности, в нем тоже уже «свернуты» многие знания и мыслительные операции, и поэтому проанализировать его строение не так-то легко. Чтобы преодолеть эти трудности и осуществить структурный анализ процессов решения, мы ввели особую (в каком-то смысле фиктивную) модель арифметической задачи — так называемую *«предметно заданную»*. По замыслу, это — задача, которая может возникать непосредственно в контексте практической деятельности, из разложения и объединения реальных совокупностей, и предполагает реальное наличие некоторых частей этих совокупностей; последние как бы *входят в условия самой задачи* наряду со знаками. Анализ этих «генетически упрощенных» моделей позволил выделить ряд существенных сторон современной учебной арифметической задачи и рассмотреть их в отвлечении от других сторон, наслаивающихся вторично. В частности, особенно рельефно выступила зависимость деятельности по решению задачи от : а) характера предметного преобразования совокупности, б) вопроса задачи, в) характера тех заместителей (знаков), которые входят в ее условия (см. [1, II]).

Но вместе с тем оказалось, что эти модели, введенные сначала, повторяем, как некоторый абстрактный фиктивный праобраз действительных арифметических задач, соответствуют вполне реальным задачам, которые являются (или в обучении могут быть сделаны) *генетиче-*

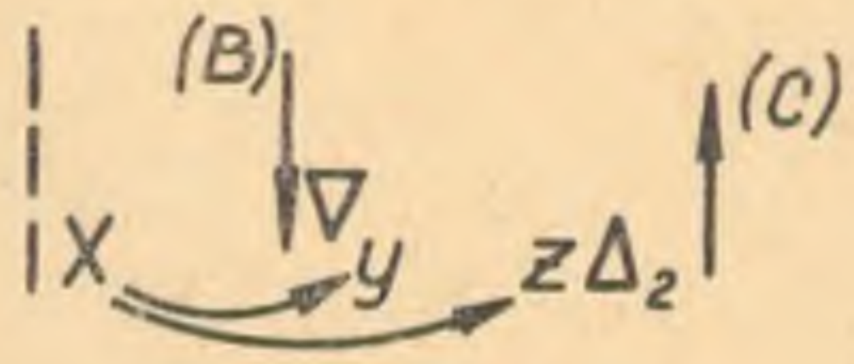
ски первичными арифметическими задачами. Мы проверили это положение экспериментально в опытах с дошкольниками и получили ряд важных для нас результатов, которые будут изложены в другом месте. Здесь же, лишь отметив факт последующей экспериментальной проверки, нам важно изложить основные моменты теоретического анализа возможных способов решения «предметно заданных» задач. При этом мы особенно хотим обратить внимание на тот способ изображения процессов решения задач, который мы применяем (см. [I, II]). Изображения выступают для нас по сути дела как абстрактные *модели* реальных процессов решения; анализируя их, мы получаем разнообразные знания об особенностях решения задач детьми, не обращаясь непосредственно к экспериментальному эмпирическому материалу, мы предвосхищаем результаты экспериментов; впоследствии эти знания, полученные на изображениях-моделях, нашли самое точное подтверждение в экспериментах с дошкольниками.

2. Первое, что становится ясным из схемы «предметно заданной» задачи, это то, что решение каждого из ее вариантов может идти как бы по двум плоскостям — *предметов* или *чисел*, и процессы решения соответственно этому будут существенно различаться как по составу операций, так и по определяемому им «пониманию» условий.

Возьмем, к примеру, первый вид задачи, когда две совокупности, y и z, были объединены в одну; мы имеем здесь объединенную совокупность X непосредственно перед собой, знаем число, характеризующее количество элементов в одной из частей, и должны либо практически выделить вторую часть, либо выразить количество ее элементов в числе. Наглядно-схематически этот вид задачи может быть выражен в формуле 1.



Формула 1



Формула 2

где вертикальная штриховая линия изображает временной раздел ситуаций, $\Delta_1\uparrow$ («дельта один — стрелка») — операцию пересчета, а $(z?)$ — вопрос задачи (см. [I, II, стр. 39—40]).

Если мы будем решать задачу, опираясь на предметы, то должны будем в непосредственно заданной совокупности X отсчитать совокупность, соответствующую числу (B), т. е. совокупность y, тем самым выделить из X совокупность z и, если этого требует вопрос задачи, пересчитать ее и получить число (C). Наглядно-схематически этот процесс решения может быть изображен в формуле 2. Знак отсчета $\downarrow\nabla$ (читается: «стрелка-набла») в ней, взятый вместе со знаком разделения совокупности X, обозначает выделение из X части y.

Если же при решении этой задачи мы будем опираться в основном на числа, то должны будем пересчитать непосредственно заданную совокупность X, из полученного таким образом числа (A) отнять число (B) и затем, если этого требует вопрос задачи, отсчитать совокупность z. Наглядно-схематически эта деятельность может быть изображена так:

$$\Big| \; (B), \qquad X\Delta_2 \Big| \uparrow (A),\ (A) - (B) = (C),\ (C) \Big| \downarrow\nabla z.$$

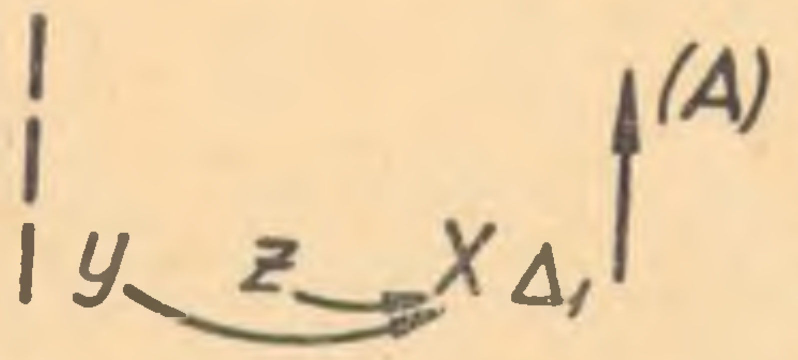
Сопоставляя эти два способа решения одной и той же задачи (подчеркиваем,— заданной в *предметной* форме), мы легко можем заметить, что первый способ, основанный на движении в самих предметах, является, бесспорно, более легким, более естественным и экономичным, чем второй: он содержит всего одну операцию отсчета, если мы хотим получить совокупность z в предметной форме, и две операции — отсчета и пересчета, если мы хотим получить число, характеризующее совокупность z; второй способ содержит, соответственно, либо три операции — пересчета, вычитания и отсчета, либо две операции — пересчета и вычитания. К этому надо добавить, что пересчет во втором случае по объему равен обеим операциям отсчета и пересчета в первом случае.

Совершенно очевидно, что второй вид задачи, когда известно численное значение совокупности z и неизвестно численное значение совокупности y, с точки зрения логики решения задачи полностью совпадает с предыдущим вариантом. Это существенно отличает «предметно заданные» задачи от учебных, собственно арифметических.

Рассмотрим третий вид задачи, когда имеем непосредственно перед собой обе частичных совокупности и должны либо создать объединенную совокупность, либо определить ее численное значение. Наглядно-схематически он изображается в формуле

(X?)

По существу этот вариант, если он задан в предметной форме, вообще не дает *собственно арифметической* задачи. Два способа деятельности, которые здесь возможны: 1) объединяем совокупности y и z (реально или в представлении, в «подразумеваемом» плане) и пересчитываем полученную совокупность; 2) пересчитываем заданные совокупности по отдельности и затем складываем полученные числа. Наглядно-схематически эти два способа деятельности могут быть изображены в формулах



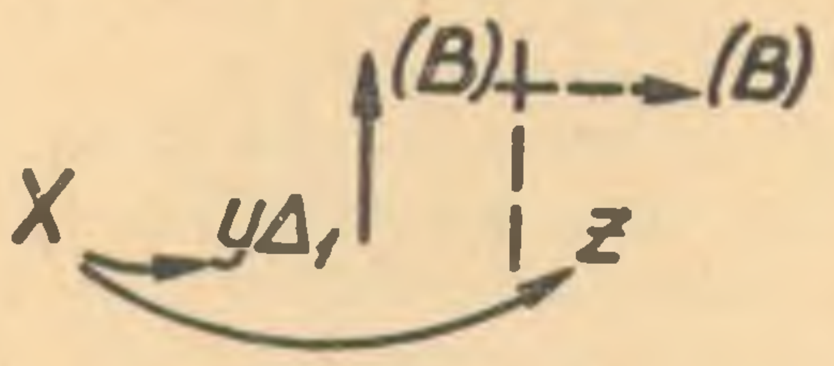
и

$$\Big|\; y\,\Delta_1 \;\Big|\!\uparrow (B) \qquad , \; z\,\Delta_2 \;\Big|\!\uparrow (C),\ (B) + (C) = (A)$$

Легко заметить, что и здесь, так же как в первом и втором видах задач, решение, опирающееся на сами предметы, оказывается более простым и экономным, чем решение, основывающееся на движении в числах. Достаточно указать на то, что операции пересчета совокупностей y и z по объему равны операции пересчета всей совокупности X, а ведь во втором случае требуется еще сложение.

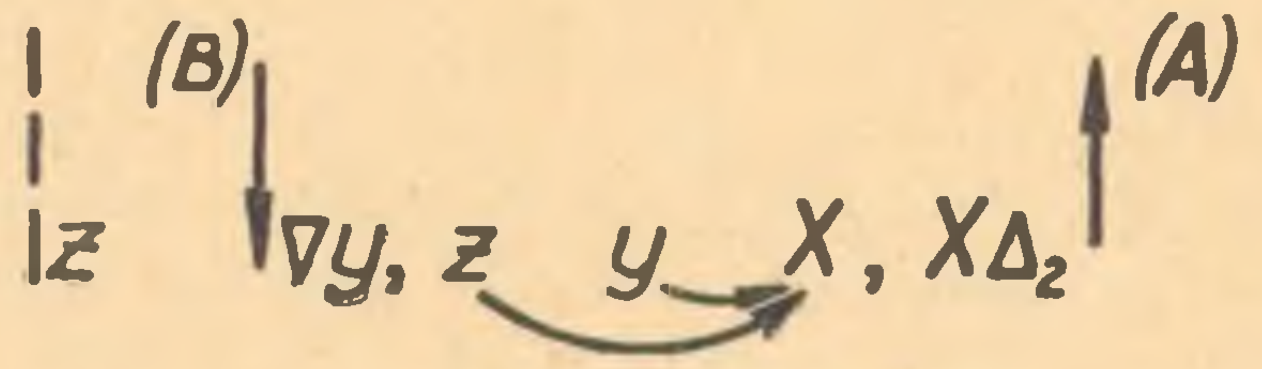
Обратимся теперь к следующим видам задач. Произошло разделение совокупности, и мы имеем перед собой непосредственно лишь одну часть. Возможны два случая: 1) мы знаем численное значение второй части и должны определить целое: 2) мы знаем численное значение целого и должны определить часть. По существу, это две совершенно различных задачи, и их решения представляют собой различные деятельности. Можно сказать, что это четвертый и пятый виды. Рассмотрим их по порядку.

Наглядно-схематически четвертый вид задачи может быть изображен в формуле 3.



(X?)

Формула 3



Формула 4

Если мы хотим решать задачу, опираясь на предметы, то прежде всего должны ввести, в дополнение к условиям, вспомогательную совокупность предметов (палочки, пальцы и т. п.), из которой мы будем брать предметы для восстановления недостающих частей исходной совокупности, описываемой в условиях задачи[1]. Тогда решение задач этого вида будет идти так: сначала мы отсчитаем совокупность y, затем практически объединим y и z в одну совокупность и, наконец, пересчитаем ее. Процесс решения может быть изображен формулой 4.

Если же решение идет в основном на числах, то мы должны будем сначала пересчитать совокупность z, затем сложить полученное число с уже имеющимся и в заключение, если этого требует вопрос задачи, отсчитать объединенную совокупность. Наглядно-схематически этот процесс изображается в формуле

$$\Big|\,(B) \qquad z\,\Delta_2 \;\Big|\!\uparrow (C),\ (B) + (C) = (A),\ (A) \;\Big|\!\downarrow \nabla X$$

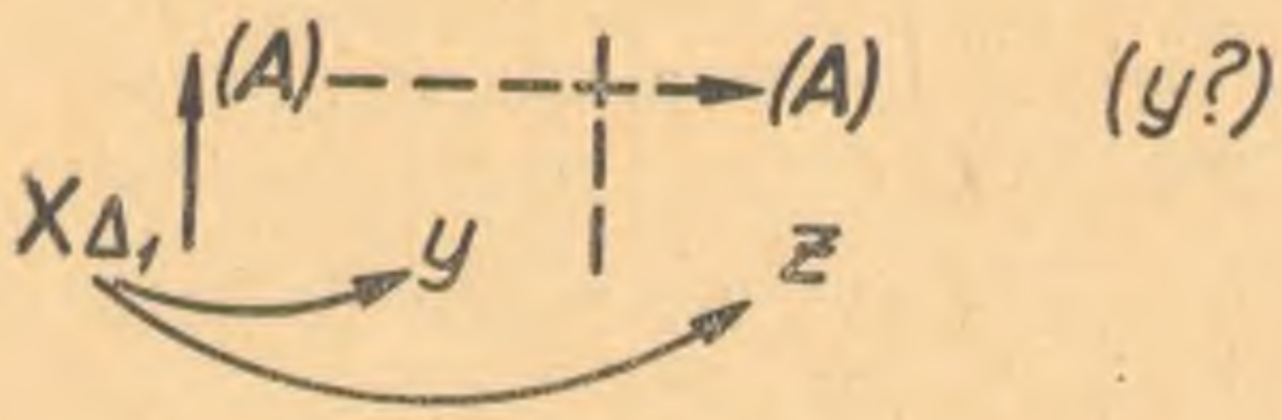
Это единственный вид задачи, в котором с общей точки зрения оба способа решения — на предметах и на числах — оказываются примерно равноценными. Первый способ получает преимущество, если ответом на вопрос задачи является создание предметной совокупности, а второй,— если ответ должен быть дан в виде численной характеристики. В конкретных случаях преимущество одного или другого зависит также от соотношения количества предметов в совокупностях y и z.

Пятый вид задачи изображается формулой 5.

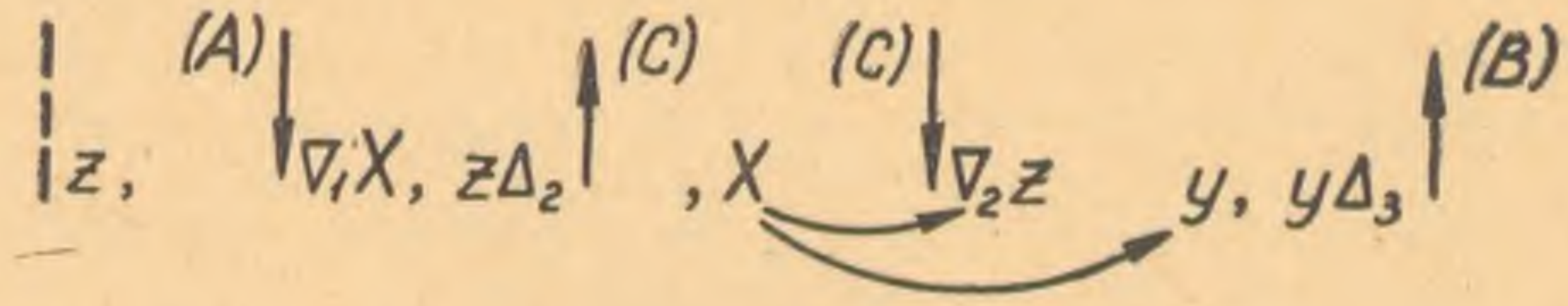
Он является самым сложным: возможны по крайней мере два существенно отличающихся друг от друга способа решения его на предметах. В одном случае мы должны сначала отсчитать на вспомогательных предметах в соответствии с числом (A) предметную совокупность X, затем пересчитать данную в условиях совокупность z и,

[1] Специально заметим, что сами действия по моделированию здесь рассматриваться не будут. Более подробному анализу их посвящены следующие сообщения. Таким образом, — и это важно все время иметь в виду — процесс решения задачи при таком изображении берется пока еще не в полном составе образующих его мыслительных операций.

получив характеризующее ее число, вновь отсчитать такую же совокупность внутри совокупности X; тем самым мы выделим внутри X совокупность y и сможем ее потом пересчитать. Наглядно-схематически этот очень замысловатый процесс может быть изображен в формуле 6.



Формула 5



Формула 6

Более простой по числу операций, но вместе с тем более «глубокий» (с точки зрения «понимания» и свернутых в нем механизмов деятельности) способ решения этой же задачи заключается в том, чтобы отсчитывать совокупность X не на новом предметном материале, а начиная с предметного материала, данного уже в совокупности z (это предполагает предварительное представление z как части X); тогда продолжение отсчета за пределами совокупности z, т. е. на вспомогательных предметах, даст предметную совокупность y, которая может быть затем пересчитана. Наглядно-схематически этот процесс решения задачи может быть изображен формулой 7.

Третий способ решения этой задачи, на числах, будет состоять из пересчета совокупности z, вычитания полученного таким образом числа из заданного числа (A) и отсчета, если того требует вопрос задачи, совокупности y. Изобразить этот процесс можно в формуле 8.

$$\Big|\, X \quad (A)\Big| \downarrow \nabla_1 z \;\Big|\downarrow \nabla_2 y,\ y\,\Delta_2 \uparrow (B)\Big|$$

Формула 7

$$\Big|\,(A),\quad z\,\Delta_2 \Big|\uparrow (C),\ (A)-(C)=(B),\ (B)\Big| \downarrow \nabla y$$

Формула 8

Нетрудно заметить, что это — единственный вид задачи, в котором предметное решение (первый случай) оказывается сложнее, чем решение в числах. Второй способ предметного решения с точки зрения числа операций оказывается более простым чем числовой, но он предполагает очень высокий уровень «понимания» отношений между предметными совокупностями (об этом мы будем говорить в одном из следующих сообщений) и поэтому, безусловно, окажется трудным для детей.

3. Заканчивая на этом анализ возможных способов решения арифметических задач, заданных в предметной форме, мы хотим особенно подчеркнуть один момент. Сопоставляя предметные и числовые способы решения задач мы все время исходили из того, что у человека, осуществляющего деятельность, имеются необходимые предметные средства моделирования совокупностей. Это предположение является совершенно оправданным, когда мы анализируем абстрактные модели учебных задач и учебной деятельности: ведь там дети на первых этапах очень часто пользуются предметными моделями — счетными палочками, вещами, выступающими как абстрактные предметы, и т. п. Нам важно было выяснить, что в этих условиях предметные способы решения задач оказываются **более выгодными**, чем решения в числах. Но если мы откажемся от этой исходной предпосылки, если мы примем, что человек не имеет никаких дополнительных вспомогательных предметных средств, а только объекты исходных преобразуемых совокупностей, то окажется, что только три задачи — первого, второго и третьего видов — вообще могут быть решены предметным образом, а две других — четвертого и пятого — обязательно требуют числового решения.

Это замечание очень важно в педагогическом плане: оно уточняет те условия, которые необходимы для организации усвоения детьми описанных выше способов деятельности, в частности, выделяют те проблемы и задачи, которые могут ставить детей в ситуацию «разрыва».

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. П. Щедровицкий, С. Г. Якобсон. К анализу процессов решения простых арифметических задач. Сообщения I и II. «Доклады АПН РСФСР» 1962, № 2 и № 3.

Поступило 9.III 1962 г.

Г. П. ЩЕДРОВИЦКИЙ
(Институт дошкольного воспитания АПН РСФСР)
С. Г. ЯКОБСОН

К АНАЛИЗУ ПРОЦЕССОВ РЕШЕНИЯ ПРОСТЫХ АРИФМЕТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Сообщение IV. Решение путем предметного моделирования и счета. Общая характеристика способа и основные проблемы, встающие при его исследовании

(Представлено членом-корреспондентом АПН РСФСР А. В. Запорожцем)

1. В предыдущем сообщении [I, III] мы рассматривали модели арифметических задач, *представленных в предметной форме*: в их условия наряду с числами входили также части тех реальных предметных совокупностей, с которыми произошли изменения. То, что эти задачи были заданы в предметной форме, давало возможность применять в решении счет и производить предметные преобразования совокупностей. Современные арифметические задачи существенно отличаются от предметно-заданных: они полностью оторвались от предметной плоскости, их условия содержат только числа (по меньшей мере, два) и описания тех преобразований, которые происходили с предметными совокупностями. Эти изменения условий влекут за собой и изменение той деятельности, посредством которой задачи решаются. В задачах, заданных предметно, можно было пересчитывать совокупности, сдвигать (или раздвигать) их и снова пересчитывать, определяя численные значения разрушаемых и создаваемых таким образом совокупностей. В учебной арифметической задаче ничего пересчитывать не нужно, да и нельзя, — все, что нужно для решения, уже пересчитано и предметов как таковых вообще нет. Способ деятельности, адекватный этой задаче, — формальные математические операции, сложение и вычитание; они были выработаны человечеством на определенной ступени исторического развития и затем передаются из поколения в поколение. Научиться решать арифметические задачи это значит — *усвоить способ решения их посредством сложения и вычитания*. Сам этот способ есть нечто сложное и не сводится к одному лишь сложению и вычитанию как формальным действиям (это будет показано в последующих сообщениях; см. также сноску 1 на следующей странице).

Но, кроме того, и усвоение их — сложный процесс, подчиняющийся своим особым законам; в настоящее время мы вряд ли можем с уверенностью говорить о них: мы даже не знаем, происходит ли усвоение путем трансформации уже имеющихся у ребенка способов деятельности в новый способ, или же — путем «чистого» присвоения нового способа, как бы переноса его извне внутрь во многом безотносительно к уже имеющимся способам деятельности. Но, во всех случаях, когда перед детьми ставят задачу, требующую нового способа решения, они сначала пытаются решить ее уже имеющимися у них способами. Таким образом, независимо от того, каковы «чистые» механизмы действительного усвоения, всегда имеет место как бы «преломление» новой задачи сквозь призму имеющихся способов решения, и мы должны учитывать его в своих исследованиях.

Это полностью относится и к процессам решения арифметических задач. Когда детям впервые дают собственно арифметическую задачу, то по существу, ставят их в *ситуацию разрыва*: решение задачи требует нового способа деятельности, которого у детей еще нет [1]. В этой ситуации, понуждаемые к решению задачи учителем, дети пытаются использовать, приспособить к новым условиям прежние, уже имеющиеся у них способы деятельности, в частности — счет. Но для этого от численно заданной арифметической задачи нужно вернуться к задаче, заданной в предметной форме, надо дополнить задачу предметными совокупностями. И дети делают это, вводя вспомогательные предметы (например, пальцы) [2], восстанавливая в них предметные совокупности, соответствующие числам, данным в условиях, тем самым моделируя исходные совокупности предметов и их преобразования.

Но при этом они не просто употребляют уже имеющийся, усвоенный ими раньше способ деятельности — к примеру счет, — а вырабатывают [3] по сути дела новый способ деятельности, комбинацию прежних, несколько видоизменяя и преобразуя и сами исходные элементы деятельности. В этом отношении очень характерно поведение Саши Ш., когда ему дают задачу: «На тарелку положили сливы. Девочка съела 6 штук, и осталось еще 3. Сколько слив положили на тарелку?» (см. [1, II, стр. 36]): сначала он говорит, что задача «трудная, не поймешь», а затем решает ее, отгибая сначала 3 пальца на руке, затем рядом с ними еще 6, и, наконец, пересчитывая все загнутые пальцы. Трудность для него, очевидно, состоит совсем не в том, чтобы восстановить те или иные предметные совокупности по заданным числам, а в том, чтобы восстановить эти совокупности в таких отношениях, *которые соответствуют условиям задачи*. Дело в том, что моделирование описываемой в условиях ситуации включает две последовательно совершаемые операции отсчета, и нужно, даже в простейших случаях, восстановив первую совокупность предметов по одному из чисел, определить затем, как или где нужно восстанавливать совокупность, соответствующую второму числу. Поясним это на самом простом примере. Дается задача: «На дереве сидело 7 птичек...»; ребенок тотчас же отгибает 7 пальцев, но дальше, в зависимости от того, что происходило в описываемой

---

[1] Для того, чтобы дети не попадали в ситуацию разрыва, когда им впервые дают арифметические задачи, и не «изобретали» бы свои особые способы решения, их начинают обучать операциям сложения и вычитания нередко еще до того, как дают первые арифметические задачи. Это — обучение решению так называемых «примеров». Но наблюдения показывают (см, в частности [1, I, стр. 37, 39]), что дети, хорошо умеющие решать арифметические примеры, тем не менее не могут решать многих задач. Это позволяет заключить, что способ решения арифметических задач не сводится к одному лишь сложению и вычитанию: дети, овладевшие этими формальными операциями, при столкновении с задачами все равно попадают в ситуацию разрыва.

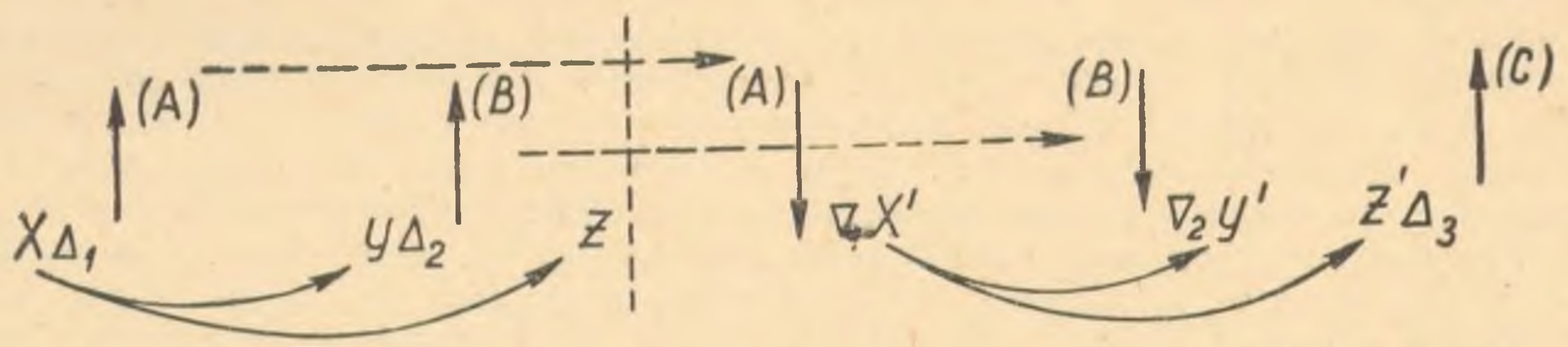
Этот вывод определяет проблемы дальнейшего исследования: необходимо выяснить, как связаны между собой решение примеров и решение задач, что еще входит в способ решения задач, кроме самого сложения и вычитания. Решив эти вопросы, мы сможем затем поставить вопрос, нельзя ли так организовать обучение решению примеров, чтобы оно одновременно обеспечивало и усвоение всего того, что необходимо для решения задач. Решение этих вопросов должно идти, очевидно, по линии анализа самого способа, основанного на сложении и вычитании, но некоторый свет на них проливает и анализ генетически более простых способов предметного моделирования.

[2] Условия этого введения будут обсуждаться особо в следующих сообщениях.

[3] Уточнение этого смотри в п. 3.

ситуации — прилетели ли еще птички или, наоборот, часть улетела, он должен будет отсчитывать второе количество либо *рядом* с первым, продолжая и дополняя его, либо в «противоположном» направлении, *«внутри»* первой совокупности. Именно этот выбор, зависящий от характера задачи и предполагающий определенное *«понимание»* ее условий, является тем новым моментом, который отличает эту деятельность от усвоенного раньше простого отсчета предметов, и именно он первоначально дается детям с трудом. (Все сказанное есть лишь внешнее описание; более детальный и точный анализ всех затронутых в нем моментов будет даваться постепенно в ходе дальнейшего анализа.)

2. Важнейшим обстоятельством, в частности, является то, что этот способ решения задач основан на особом замещении — *моделировании* в точном и узком значении этого слова. Если мы изобразим схематически деятельность ребенка при решении какой-либо простейшей задачи, то она будет выглядеть примерно так:



(X, y и z обозначают здесь предметные совокупности, знак $\triangle\uparrow$ — «дельта — стрелка» — пересчет их, знак $\downarrow\nabla$ — «стрелка — набла» — отсчет предметных совокупностей по числу, круговые стрелки — разложение совокупности X на части y и z; более подробные пояснения применяемой в формулах символики см. в [I, II, III]). В первой ситуации осталось невыясненным численное значение совокупности z. Это составляет вопрос задачи. Чтобы ответить на него, ребенок должен восстановить в соответствии с численным значением (A) всю разделенную в первой ситуации совокупность X, но уже в других предметах, т. е. совокупность X', затем внутри нее восстановить по числу (B) на новых предметах частичную совокупность y' и тем самым по существу повторить во второй ситуации на новом материале то разделение совокупности, которое имело место в первой ситуации. Получившаяся в «остатке» совокупность z' будет соответствовать исходной совокупности z и поэтому, пересчитав z', он сможет отнести полученное число к исходной совокупности z. Ответ на вопрос задачи получен. Но он получен не в результате пересчета исходной совокупности z, к которой собственно и относится вопрос задачи, а в результате пересчета другой совокупности z'; но эта другая совокупность такова (она, собственно, так создана), что полученные на ней результаты могут быть перенесены на исходную совокупность. Здесь важным специфическим моментом является также то, что к вновь созданной совокупности z' применяется в точности такая же операция — пересчет, какая должна была быть применена к исходной совокупности z. Эти два момента: 1) применение к z' той же самой операции, какую надо было применить к z, и 2) перенос результата, полученного при оперировании с z', на z создают специфику *модели как особого вида замещения.* Именно в силу этих двух обстоятельств z' является *моделью* по отношению к z, а z — *образцом* по отношению к z'.

Распространяя это определение с продукта на всю деятельность, посредством которой он получается, мы можем говорить, что вся эта деятельность является *моделированием* исходных предметных совокупностей, описанных в условиях задачи, и их преобразований. Но при этом надо помнить, что это определение имеет своим основанием сопоставление лишь последних операций всей этой деятельности. Она вся в целом есть моделирование, поскольку направлена на получение модели того, о чем спрашивают в задаче. Но было бы неверным, искать отношение модели и образца во всех элементах и компонентах этой деятельности. В частности, было бы неверным пытаться представить последовательные операции восстановления предметных совокупностей по числам во второй ситуации, как моделирование предметных преобразований, происходивших в первой ситуации, на что наталкивает приведенный нами выше вариант задачи. В дальнейшем мы увидим, что между операциями по моделированию предметных совокупностей и предметными преобразованиями этих совокупностей существуют свои весьма сложные и меняющиеся отношения, зависящие от формы самой задачи. Между тем — и это тоже будет показано в дальнейшем — дети невольно, но очень часто, выделяют именно такое отношение и начинают ориентироваться на него в своей деятельности. Поэтому весьма важной оказывается задача, предотвратить такое понимание.

3. Специального обсуждения требует также вопрос о том, насколько описанный выше способ моделирования условий арифметической задачи является усвоенным и насколько он является «изобретенным», «открытым» или построенным ребенком.

Как и всякий другой способ деятельности, решение арифметических задач путем предметного моделирования имеет своим основанием *усвоение* определенных способов деятельности выработанных человечеством и особым образом «поданных» ребенку.

В отношении счета эти утверждения, по-видимому, бесспорны. Но распространяются ли они и на ту «добавку», которая специфична для такого решения арифметической задачи, на само *предметное моделирование* и на *определение порядк*а операций восстановления? Ведь пересчет и отсчет как особые операции складываются в связи с решением несколько иных задач, относящихся к собственно предметному уровню. Дети усваивают их, точно также, на иных задачах. Чтобы применить эти способы действия здесь, в учебных арифметических задачах, ребенок должен существенно изменить, преобразовать их. Да и сама «идея» предметного моделирования условий есть очень существенная добавка, которую нужно еще, по-видимому, «открыть» или же усвоить в специально организованном обучении. Достаточно обоснованный ответ на эти вопросы требует специального исследования. В частности, нужно выяснить в деталях, как проходит обучение счету, не создаются ли уже там ситуации, которые приводят к подобным же по существу задачам, но только на предметном уровне; не отрабатываются ли элементы и общая схема предметного моделирования еще до того, как мы переходим к собственно арифметическим задачам, например, на предметно-заданных задачах или даже в обычном счете. Если это обнаружится, то, мы, конечно, и здесь не сможем говорить об «открытии» способов деятельности ребенком, а должны будем говорить о прямом усвоении.

Но нас сейчас больше интересует даже не это, а другая сторона дела. В принципе мы, по-видимому, не можем и не должны отрицать возможности «построения» решений задач ребенком. Более того, мы должны, очевидно, стремиться именно к этому и воспитывать у детей уменье *самостоятельно строить процессы решения* и превращать их затем в «способы решения». Реальный вопрос поэтому заключается в определении границ этой самодеятельности ребенка, в определении отношения построения процессов решения к уже усвоенным способам деятельности и к новым способам, выделяемым на основе построенного решения. Этим кругом вопросов мы будем заниматься по существу на протяжении всей работы, но кроме того он станет предметом специального обсуждения в одном из последующих сообщений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. П. Щедровицкий, С. Г. Якобсон. К анализу процессов решения простых арифметических задач. Сообщения I—III. «Доклады АПН РСФСР», 1962, № 2—4.

Поступило 17.III 1962 г.

Г. П. ЩЕДРОВИЦКИЙ
(Институт дошкольного воспитания АПН РСФСР)
С. Г. ЯКОБСОН

К АНАЛИЗУ ПРОЦЕССОВ РЕШЕНИЯ ПРОСТЫХ АРИФМЕТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Сообщение V. Решение путем предметного моделирования и счета. Теоретический анализ вариантов задач

(Представлено членом-корреспондентом АПН РСФСР А. В. Запорожцем)

1. В предыдущем сообщении мы рассмотрели отношение *учебных арифметических задач* к так называемым *«предметно-заданным» задачам* и дали общую характеристику способа решения учебных задач путем *предметного моделирования и счета*. Сердцевину этого способа решения, как было показано, составляет *моделирование* ситуации, описываемой условиями задачи, в каких-то других вспомогательных совокупностях. А условием моделирования является — мы будем пользоваться пока традиционной терминологией — определенное *«понимание»* текста задачи: только на основе этого «понимания» ребенок может выбрать *направление отсчета* второй совокупности.

Анализ экспериментального материала с этой точки зрения обнаруживает странное, на первый взгляд, явление: одни и те же дети хорошо «понимают» задачи одних видов (соответственно, умеют их решать) и совершенно «не понимают» (не умеют решать) задач других видов.

Вот соответствующая группа наблюдений:

Света М., I класс, октябрь. 1. *Эксп.* У мальчика было 7 карандашей. Он потерял 2. Сколько у него осталось карандашей? *Света.* (Сразу же.) 5.

2. *Эксп.* Во дворе гуляли желтые гусята и 2 белых. А всего гусят было 4. Сколько было желтых? *Света.* (Долго думала.) 6.

3. *Эксп.* У кошки черные котята и еще 2 серых. А всего котят вместе, черных и серых, 5. Сколько черных? *Света.* (Считает на пальцах.) 7.

Люба Л., I класс, декабрь. 1. *Эксп.* Бабушка испекла пирожки. 2 пирожка съела Вера. *Люба.* (Загибает на руке два пальца.) *Эксп.* А 5 пирожков оставила маме... *Люба.* (Загибает на другой руке все пальцы.) *Эксп.* ...Сколько пирожков испекла бабушка? *Люба.* (Пересчитывает пальцы.) 7 пирожков.

2. *Эксп.* Сидели птички; потом прилетели еще 4. *Люба.* (Загибает 4 пальца.) *Эксп.* И стало 7. Сколько птичек было сначала? *Люба.* Сначала сидело 4 и стало всего 7 птичек. 7 птичек, да? *Эксп.* (Повторяет условия задачи.) *Люба.* (Опять загибает 4 пальца.) А как это понять? Я так не пойму: 4 сидят, а 7 то не прилетало. *Эксп.* (Повторяет условия задачи в третий раз. Люба опять ничего не поняла и задачи не решила.)

3. *Эксп.* Лежали книги, потом положили еще 2 и стало 5. Сколько книг лежало сначала? *Люба.* (Загнула два пальца на одной руке, потом все пальцы на другой, пересчитала все.) 7.

Дело выглядит так, что испытуемые «понимают» первую задачу и «не понимают» второй и третьей. Но в чем разница между этими задачами? Почему эти две девочки (и многие другие дети, протоколы наблюдений которых мы не приводим) хорошо «понимают» задачи одного типа и «не понимают» задач другого типа? В чем то существенное различие между этими задачами, которое обусловливает столь странную разницу в отношении к ним детей? И что такое вообще само «понимание»?

Когда ребенку читают условия арифметической задачи, к примеру: «На дереве сидели птички, потом прилетело еще 6 птиц и стало 11...», то при этом он может *представить* себе реальное дерево с порхающими по ветвям птицами (или рисунок дерева с птицами, сидящими на ветвях, какой в последнее время нередко приводят в учебниках), потом он представит себе летящих к дереву и садящихся на его ветви птиц, наконец, в соответствии с текстом, — опять дерево и птиц, успокоившихся после полета. Весь этот процесс последовательного представления различных ситуаций, бесспорно, будет определенным «пониманием» условий текста и описанных там событий. Но такое ли «понимание» нужно для решения арифметических задач? Ведь «понимание» условий задачи является лишь этапом в процессе решения: на основе его надо осуществить определенные действия — «собственно решение» задачи. В разбираемых нами случаях это будет, по-видимому, *моделирование* в определенных предметных совокупностях ситуации, описанной в задаче. Эта деятельность предполагает «понимание». Более того, можно, по-видимому сказать, что само «понимание» определяется деятельностью моделирования: оно необходимо только для того, чтобы можно было осуществить решение задачи заданным способом, и должно быть таким, чтобы обеспечить эту свою функцию. Наглядно-схематически это можно было изобразить так:

«понимание» условий задачи $\longleftarrow$ моделирование

Но можно спросить, является ли описанное выше «понимание — представление» тем «пониманием», которое обеспечивает последующее моделирование, и если нет, то каким должно оно быть? Чтобы ответить на эти вопросы, мы должны проанализировать строение той деятельности моделирования, которая необходима для решения различных арифметических задач.

2. Процесс предметного моделирования простых арифметических задач имеет свою жесткую логику, зависящую от того, какие из совокупностей по условиям задачи известны, а какие нет. Если рассмотреть все задачи с точки зрения *характера описываемых в условиях предметных преобразований* и *последовательности* задания известных и неизвестных количеств, то получится всего 7 различных вариантов задач. Если изобразить описываемое в условиях объединение совокупностей знаком γ («знак объединения»), а описываемое в условиях разделение или выделение совокупностей — знаком $\wedge$ («знак разделения»), известные количества целого — знаком (A), известные количества частей — знаками (B) и (C), неизвестное — знаком $(?)$, то схематически эти 7 вариантов условий можно будет изобразить так:

1) $(B)\ \gamma\ (C) \longrightarrow (?)$ 3) $(A) \wedge (?) \longrightarrow (C)$ 5) $(B)\ \gamma\ (?) \longrightarrow (A)$
2) $(A) \wedge (B) \longrightarrow (?)$ 4) $(?)\ \gamma\ (C) \longrightarrow (A)$ 6) $(?) \wedge (B) \longrightarrow (C)$

7) $(A) < \begin{matrix} (?) \\ (C) \end{matrix}$

(Седьмой вариант условно можно называть «нейтральным»: в нем не указывается, как преобразовывались совокупности, а просто говорится, что есть всего столько-то предметов и одни из них такие, а остальные другие.)

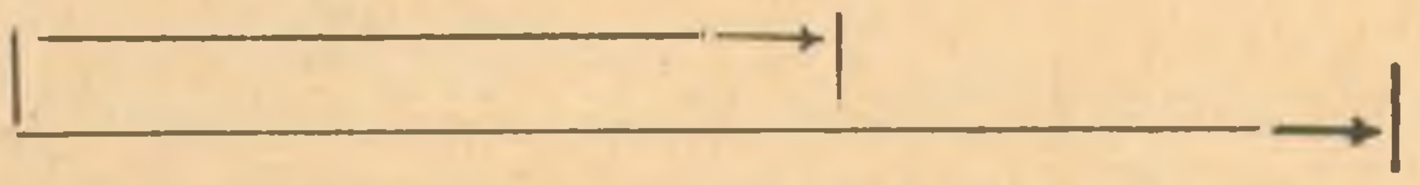
Рассмотрим теперь эти варианты задач с точки зрения возможного способа решения их путем предметного моделирования и счета. При этом будем особенно обращать внимание на два момента: 1) отношение между последовательностью задания известных и неизвестных количеств в условиях, с одной стороны, и возможной последовательностью моделирования предметных совокупностей — с другой; 2) характер преобразования описываемых совокупностей, с одной стороны, и характер преобразования моделей — с другой.

В первом и втором вариантах задач последовательность задания известных значений полностью совпадает с последовательностью моделирования их в предметных совокупностях. Слушая условия задачи, ребенок сразу же может восстанавливать предметную совокупность, соответствующую первому числу. Затем он должен определить «направление» отсчета второй совокупности. Ориентирами в этом деле могут служить слова «улетели», «прилетели», «всего», «из них» и т. п. (мы сейчас оставляем в стороне вопрос, насколько этот путь решения задач оправдан и приемлем с более широкой точки зрения; важно, что в этих вариантах дети м о г у т так действовать). Восстановив вторую совокупность, ребенок автоматически получает и третью—целое или часть,— которую может пересчитывать. Эти задачи, очевидно, являются самыми простыми, и анализ тех трудностей, которые они могут вызвать у детей, должен проводиться либо на самых «слабых», либо — значительно спущен «вниз» в дошкольный возраст.

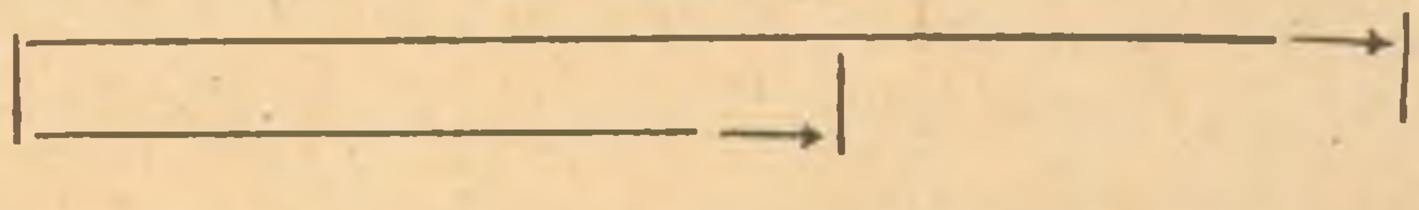
Третий вариант, по-видимому, также не должен вызывать особых затруднений у детей; здесь ребенок тоже начинает с того, что восстанавливает предметную совокупность, соответствующую первому числу, затем он просто пропускает неизвестное, восстанавливает совокупность, соответствующую второму числу, ориентируясь на те же слова «улетели», «всего», «разделили» и т. п., и получает в «остатке» совокупность, соответствующую искомому числу. Таким образом, третий вариант должен решаться так же, как и второй; по существу он сводится к нему.

Шестой вариант, если брать его с точки зрения последовательности моделирования количеств, тоже не должен вызвать затруднений. Ребенок, слушая или читая условия задачи, пропускает первое неизвестное, затем последовательно восстанавливает совокупности, соответствующие первому и второму числу, и получает в результате искомое число. Но, будучи легким с точки зрения последовательности восстановления совокупностей, этот вариант должен представлять известную трудность с точки зрения выбора «направления» отсчета второй совокупности. Здесь слова «улетели», «съели», «всего» и т. п. уже не могут служить ориентирами; ребенок должен произвести известное *преобразование* условий задачи, он должен начать двигаться как бы в *обратном* порядке,— восстановив первую совокупность, задаться вопросом: в каком отношении к ней должна стоять вторая. В этом преобразовании или, иначе, в ответе на подобный вопрос и должно состоять, очевидно, «понимание» этого варианта задачи.

Но особенно отчетливо эта сторона дела выступает в четвертом варианте задач. Ребенок пропускает первое указание на совокупность, восстанавливает совокупность, соответствующую первому числу, и оказывается перед страшным затруднением: он не знает, что делать со вторым числом, *как* и *где* восстанавливать соответствующую ему совокупность. Моделирование в той последовательности, в какой задаются известные численные значения, предполагает исключительно глубокое (и опосредствованное) «понимание» отношений между соответствующими совокупностями: только что отсчитанную совокупность, соответствующую числу (C), он должен был бы начать отсчитывать второй раз, поскольку она является частью второй совокупности, соответствующей числу (A). Схематически это выглядело бы так:



Значительно более естественным является другой путь: *перевернуть условия задачи;* начать с восстановления совокупности, соответствующей второму из задаваемых чисел — (A), а потом *уже внутри* него отсчитать совокупность, соответствующую первому числу (C). Схематически этот порядок операции может быть изображен так:



Но и такой способ деятельности предполагает совершенно особое «понимание» условий задачи: *еще до начала непосредственного моделирования-отсчета* нужно определить, в каком отношении стоят друг к другу совокупности, соответствующие второму и первому числу. Это — отношение целого и части, и ребенок, чтобы «понять» задачу подобного типа, должен уже владеть этим отношением как категорией. При этом — мы специально подчеркиваем,— установив это отношение на основе «понимания» предметного преобразования совокупностей, он должен затем совершенно пренебречь логикой самого предметного действия— объединения, и строить свою модель *путем разделения* предметных совокупностей, подчиняясь исключительно *логике отношения целого и части.* Таким образом, в четвертом варианте задачи, если брать идеальный случай, последовательность моделирования должна быть *прямо противоположной* последовательности задания известных значений, а характер отношений, устанавливаемых между совокупностями в моделировании, противоположным тому, которое фиксируется в словесном описании. Очевидно, этот вариант задачи должен представлять наибольшую трудность для детей.

Пятый вариант задачи, так же как и четвертый, можно решать двумя совершенно различными способами. Если ребенок уже овладел отношением целого и части и умеет подчинять ему последовательность моделирования, то пятый вариант решается в точности так же, как и четвертый (в последнем случае). Но, если ребенок не овладел этим способом, то может решить его и иначе; причем, в этом варианте второй путь оказывается более легким, чем подобный же путь в четвертом. Можно сказать, что последовательность задания числовых значений в этом варианте сама наталкивает на этот путь, чего не было в четвертом варианте. Слушая или читая условия задачи, ребенок восстанавливает совокупность, соответствующую первому числу, потом он получает второе число, характеризующее целое, и одновременно с ним сообщение, что это второе получилось дополнением первого. Поэтому ребенок, стимулируемый условиями задачи, может просто продолжить отсчет до второго числа, а потом, совершенно естественно пересчитать это дополнение. В четвертом варианте задачи, как мы уже указывали, можно было действовать таким же образом, но там этот способ действия не так совпадал с описанием предметных преобразований; нужно было переосмысление и собственно преобразование примерно такого типа: «Если какое-то количество было дополнено другим, то это все равно, что другое было дополнено первым».

Варианты	Последов. задания числ. значений	Последов. моделирования	Характер предметн. преобразов.	Характер преобразов. в моделиров.
1	$\longrightarrow$	$\longrightarrow$	γ	γ
2	$\longrightarrow$	$\longrightarrow$	Λ	Λ
3	$\longrightarrow$	$\longrightarrow$	Λ	Λ
4,I	$\longrightarrow$	$\longrightarrow$	γ	λ
4,II	$\longrightarrow$	$\longleftarrow$	γ	Λ
5,I	$\longrightarrow$	$\longleftarrow$	γ	Λ
5,II	$\longrightarrow$	$\longrightarrow$	γ	γ
6	$\longrightarrow$	$\longrightarrow$	Λ	γ
7	$\longrightarrow$	$\longleftarrow$	не указан	Λ

В седьмом варианте нет указаний на характер предметных преобразований описываемых совокупностей и поэтому выбор действий при моделировании может определяться только с помощью и на основе категории целого части. Для детей, которые не владеют этой категорией, он должен представлять значительные трудности.

Полученные выше результаты теоретического анализа представлены в таблице. «Стрелка» изображает здесь направление последовательности задания числовых значений и их моделирования; перевернутый знак объединения в варианте 4, I указывает на то, что там это соответствие действий в предметном преобразовании и в моделировании достигается за счет определенного смыслового преобразования.

Поступило 9.III 1962 г.