Г.П. Щедровицкий

ЛОГИКО-ПСИХОЛОГИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ПРОЦЕДУР И СПОСОБОВ РЕШЕНИЯ ПРОСТЫХ АРИФМЕТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Вступление: связь логики и психологии как проблема

В той работе по созданию и развитию научной педагогики, которая в последние годы развертывается в нашей стране все шире и шире, установление правильных и эффективных связей между психологическими и логическими понятиями и методами анализа, более широко- между психологией и логикой, явлнется одной из важнейших задач, и от того, насколько быстро мы сможем ее решить и как именно решим, во многом зависит будущее не только педагогики, но также психологии и самой логики.

Поставленная со всей остротой уже в конце XIX и начале XX столетия (см., в частности, [1] [2]) проблема связи логики и психологии в тот период не только не могла быть эффективно решена, но даже не могла получить правильного звучания и освещения в силу двух совершенно закономерных и необходимых процессов, которые в то время целиком занимали лучшие умы: с одной стороны, это был процесс все большего отделения психологии от философии, в рамках которой она зародилась и долгое время развивалась (см., в частности, [3] [4] [5] [6]), а с другой стороны, процесс крайне резкого и бурного освобождения логики от пут психологических обоснований и интерпретаций (см. [7] [8]). В среде работающих логиков в тот период лозунг "логика бойся психологии" стал столь же популярным, как и обратный ему лозунг "психология бойся логики" среди реально работающих психологов. Поэтому любая установка на связь и взаимодействие логики и психологии в этих условиях вступала в противоречие с господствующими умонастроениями, не вызывала отклика и сочувствия и, естественно, не могла проводиться в жизнь. Всю первую четверть века логика и психология непрерывно отдалялись друг от друга и инерция этого процесса чувствуется до сих пор.

Однако уже первые шаги самостоятельного развития психологии в двух наиболее интересных ее направлениях - в школе Л.С.Выготского и в школе Ж.Пиаже - вновь поставили, хотя теперь уже совсем в иных формах и как бы изнутри психологии, проблему зависимости психологического анализа от логических представлений и понятий, а вместе с тем и более общую проблему связи логики и психологии. В культурно-исторической концепции Л.С.Выготского узлом и сердцевиной всего стала проблема знака и значения и соответственно этому на передний план вышли семиотические аспекты логики /см.[9] [10] [11] [12] [13]/, в концепции Ж.Пиаже главной была проблема организации действий и систем операций и для решения ее использовался формальный аппарат теории групп и математической логики / см. [14] [15] [16] [17] [18] [19] [20] /. Не только конкретные варианты решений, но и сами ориентации в обсуждении проблем были совершенно различными, можно даже сказать - прямо противоположными, то безусловно общим было бы, что каждая из них породила новую волну дискуссий вокруг проблемы взаимоотношения логики и психологии /см. [11] [12] [13] [19] [20] [21] [22] [23] [28] /; к сожалению, значительная часть высказывавшихся, как и в прежние годы, больше обсуждала вопрос, нужно ли соединять и связывать эти две дисциплины друг с другом, нежели вопрос, как это реально делается и как можно было бы делать.

Но подлинное продвижение проблемы, ее решение и развитие, лежало, конечно, не столько в этих абстрактных дискуссиях (хотя и они имели свое положительное значение), сколько в конкретной разработке методов комплексного логико-психологического анализа различных явлений мышления и деятельности. Наиболее продуктивным здесь оказалось поле педагогических проблем и задач.

Под эгидой Ж.Пиаже оформилось европейское объединение "генетической эпистемологии" /см. [24] /, для которого важнейшей проблемой на многие годы стала проблема использования аппарата математики и математической логики в психологических и педагогических исследованиях. В СССР особенно интенсивную работу вели две группы, в истоках своих тесно связанные с культурно-исторической концепцией Л.С.Выготского. Одна из них продолжала и развивала основные психолого-педагогические идеи этой концепции, соединяя их с представлениями и методами диалектической логики и современной методологии /см. [25] [26] [27] [28] [29] [30] [31] /, другая реализовала на материале учебных предметов программу развития "содержательно-генетической логики" и семиотики /см. [32] [33] [34] [35] [36] [37] [38] [39] [40] [41] [42] [43] [44] [45] /. И хотя обе эти группы накопили к настоящему времени довольно значительный опыт конкретных исследований, основанных на объединении представлений и методов логики и психологии, тем не менее сама методология этой работы, ее приемы и способы, остаются во многом неосознанными и требуют тщательного обсуждения и анализа.

Самое сложное и непривычное во всем этом круге проблем состоит, наверное, в том, что как содержательно-генетическая, так и диалектическая логика отрицают возможность существования всеобщих логических форм, которые могли бы прикладываться к любому и всякому знаниево-мыслительному содержанию. Поэтому анализ всяких новых проявлений мышления и деятельности (в условиях обучения и вне их) предполагает каждый раз эмпирически ориентированное конструирование новых логических схем, воспроизводящих, как обычно говорится, "нормативную" структуру /см. [38] [39] [46] / процессов (или процедур) мышления и движущихся в них знаний. Иными словами, чтобы проанализировать и описать какие-то процессы решения задач или другие случаи и примеры мыслительной деятельности, исследователь должен сначала построить логическую схему этих процессов или этой деятельности, а затем, используя эту схему особым образом, произвести еще полный психологический анализ всех явлений. В силу этого "логический" и "психологический" анализ материала оказываются здесь отнюдь не самостоятельными исследованиями - хотя логическое как "абстрактное" / см. [47] [48] / может существовать и само по себе, - а лишь двумя компонентами или даже лишь двумя сторонами одного и единого логико-психологического исследования.

И, может быть, именно потому подобные исследования остаются до сих пор единичными, что они требуют от исследователя органического соединения и совмещения двух разных систем средств и разных методов анализа. Еще точнее, наверное, нужно было бы сказать, что они требуют специалиста совсем нового типа - специалиста по мышлению и деятельности (а не "логика" или "психолога"), специалиста, использующего в своей работе средства и методы "Теории мышления" и "Теории деятельности", которые не сводятся ни к традиционной логике, ни к традиционной психологии мышления, а объединяют представления и методы той и другой, развивая их далее на новой основе.

Но если принять эту мысль, то придется далее сказать, что сегодня главнейшей задачей становится разработка новых образцов (или новых "парадигм", как говорит Т.Кун - см. [49] / комбинированного или комплексного логико-психологического исследования мыслительной деятельности. И именно в этом плане прежде всего надо рассматривать весь представленный ниже материал.[1]

Общая характеристика трех способов решения простых арифметических задач

1. В соответствии с принципами логического "нормативного" анализа мыслительной деятельности, применяемого при решении педагогических проблем /см. по этому поводу [34] [35] [39] /, мы провели исследование процессов решения простых арифметических задач. Анализ внешних проявлений деятельности детей, соотнесенный с представлениями об историческом развитии арифметики, показал, что можно выделить три основных способа решения:

А. Путем "предметного моделирования". В этом случае в соответствии с условиями задачи отсчитываются предметные совокупности (это могут быть пальцы, кубики и т.п.), моделирующие количественные отношения между группами предметов, преобразования которых описаны в условиях, а затем количественная характеристика искомой группы определяется путем пересчета соответствующей вспомогательной совокупности. Это - способ решения, к которому дети, обученные счету, приходят сравнительно легко сами, но он практически применим лишь в пределах двух первых десятков /см. [37] [42] /.

Б. Путем "арифметического" сложения и вычитания. Это способ, которому детей специально обучают в начальной школе.

В. Путем составления "алгебраического" (теоретико-арифметического) уравнения с Х, преобразования его к виду, допускающему отождествление с арифметическим выражением, а затем сложения или вычитания в соответствии с видом этого арифметического выражения. Это способ, которому детей начинают обучать с V класса.

2. Более детальный теоретический и экспериментальный анализ перечисленных способов привел нас к выводу, что сам "способ решения" не является и никогда не может быть однородным образованием; он всегда содержит две принципиально разные части: 1) "оператив-

---

1 В предметном плане этот материал репрезентирует некоторые результаты экспериментально-теоретических исследований, проведенных нами совместно с С.Г.Якобсон в 1959-1962 гг., и непосредственно примыкает к двум более ранним публикациям /см. [37] [42] /; на русском языке публикуется впервые.

ную систему" с движениями в ней, регулируемыми жесткими правилами, и 2) переход от условий задачи к выражениям оперативной системы /см. [42; 343-357] /.

В исследуемой нами области арифметики такими оперативными системами являются: а) числовой ряд с операциями пересчета и отсчета (в обе стороны по числовому ряду); б) разделение целого на части и объединение частей в целое (см. [37] [42]); в) арифметические соотношения так называемых "сложений" и "вычитаний" чисел ("примеры"), переходящие затем в несколько иную систему сложения и вычитания "столбиком"; г) преобразования алгебраических выражений к формам, которые могут быть отождествлены с арифметическими выражениями.

Каждая из этих оперативных систем может использоваться при решении арифметических задач. Первая и вторая - образуют основу способа "предметного моделирования", третья - основу "арифметического" способа решения, четвертая и третья (взятые именно в такой последовательности) - основу "алгебраического" способа решения задач. Оперативные системы, как правило, четко фиксируются в науке (исключением была оперативная система "целое-части") и предлагаются детям в качестве специально выделенных содержаний учения (ср. [37] [42]). С "переходами" от условий задачи к "единицам" или "выражениям" оперативных систем дело обстоит иначе: их очень редко рассматривали как особую деятельность и необходимую часть способа решения (а когда рассматривали, то интерпретировали как "понимание", т.е. как субъективное явление, недоступное объективному описанию); поэтому они не были выделены в качестве особых содержаний учения и, следовательно, им нельзя было обучать (в точном смысле слова; см. по этому поводу [42; 343-357] , а также [50] и [51]).

3. Одна и та же арифметическая задача может быть решена с помощью разных оперативных систем и, следовательно, - посредством разных деятельностей. И это относится не только к "движениям" внутри самих оперативных систем: с их изменением меняется и характер той деятельности, посредством которой осуществляется переход от условий задачи к соответствующим выражениям оперативных систем; для одних оперативных систем она будет простой и компактной, для других - сложной, многократно опосредованной. Это различие в деятельности перехода определя-

ется отношением оперативной системы к задачам, ее, если можно так сказать, "возможностями" в отношении этих задач. С этой точки зрения можно говорить о совершенстве и несовершенстве оперативных систем, об их адекватности и неадекватности задачам. Такая оценка оперативных систем особенно важна, потому что, как выясняется, основные затруднения у детей вызывает не усвоение оперативных систем самих по себе, а усвоение деятельности по переходу от условий задачи к выражениям этих оперативных систем. Рассмотрим в этом плане перечисленные выше способы решения арифметических задач.

Сравнительный анализ алгебраического и арифметического способов решения задач

I. Начнем с "алгебраического" способа. В случае простых задач перехода от их условий к выражению оперативной системы представляет собой последовательное обозначение или отображение элементов текста условий в знаках системы. К примеру, текст условий задачи "На дереве сидели птички $|_{1}$, потом прилетело еще $_{2}|3|_{3}$ и стало $_{4}\ 9\ _{5}$" отображается в пятиэлементном выражении "X + 3 = 9". С точки зрения последовательности отображения и усваиваемого в самом начале (почти "естественного") смысла знаков + и – структура алгебраического выражения "изоморфна" структуре текста (мы изобразили последнюю вертикальными линиями членения с индексами; подробнее о роли изоморфизма в подобных процессах мышления см. [4I]). Точнее, наверное, нужно сказать, что построение выражения в алгебраической системе предполагает очень простую ("линейную") деятельность "чтения" (т.е. расчленения и понимания) текста. С точки зрения этой деятельности не существует никакой разницы между "косвенными" и "прямыми" задачами. И достигается это благодаря тому, что в алгебраической оперативной системе существуют специальные знаки для обозначения неизвестных количеств. Именно благодаря им сам переход от условий задачи к выражению оперативной системы (подчеркнем еще раз: для простых задач) становится крайне простым, "линейным", и по сути дела ему не нужно специально обучать, так как дети легко овладевают им уже в дошкольном возрасте.

Знаки + и – в алгебраических выражениях благодаря тому же изоморфному отношению изображают предметные преобразования совокупностей, описываемые в условиях задачи, или отношения частей к целому и целого к части, непосредственно следующие из текста условий. Они не являются знаками операций, ибо никаких арифметических преобразований в этой оперативной системе и не нужно делать; в этом отношении они принципиально отличаются от арифметических знаков + и –, имеющих чисто оперативный смысл.

После того, как выражение алгебраической системы получено, оно преобразуется в соответствии с правилами системы к виду, который может быть отождествлен с каким-либо выражением арифметической системы. Например, алгебраическое выражение "Х + 3 = 9" преобразуется к виду "9 – 3 = Х", а это последнее замещается арифметическим выражением "9 – 3 = ". После перехода в арифметическую систему производятся собственно арифметические операции – замещение суммы или разности одним числом в соответствии со знаком полученного выражения; в данном примере разность 9 – 3 замещается числом 6.

2. При использовании "арифметического" способа решения последовательное поэлементное отображение текста условий задачи в выражение арифметической оперативной системы в большинстве случаев невозможно. Если, например, мы имеем тот же текст условий задачи "На дереве сидели птички, потом прилетело еще 3 и стало 9", то арифметическим выражением, соответствующим ему, будет "9 – 3 = "; как видим, текст условий и выражение различаются в последовательности элементов структур, а также в "смысле" предметных преобразований, описываемых условиями, и арифметических операций. Есть всего шесть вариантов простых арифметических задач, в условиях которых четко определяется характер предметных преобразований, происходящих в описываемых ситуациях. Только два из них могут быть отображены изоморфным образом в арифметических выражениях. В четырех других вариантах обязательно должно быть расхождение между последовательностью элементов текста и отображением их в знаках выражений оперативной системы; в трех из этих вариантов обязательно имеет место расхождение между описываемыми преобразованиями совокупностей и "смыслом" арифметических операций. Есть кроме того, еще четыре варианта задач, в которых предметные преобразования не описываются, а задаются (как бы статически) лишь отношения между частями и целым. Во всех этих задачах выбор арифметической операции требует

специального "осмысления" условий с точки зрения категории "целое-части", и уже одно это исключает линейное поэлементное отображение их в каком-либо арифметическом выражении, но, помимо того, в трех из них обязательно должно быть расхождение между последовательностью элементов в тексте и последовательностью построения арифметического выражения (подробнее все это описано в раоотах [37] и [42]). Чтобы читатель мог лучше ориентироваться в дальнейшем анализе, мы приведем символические схемы структуры условий всех десяти вариантов задач:

I. (B) γ (C) → (?)   2. (A) Λ (B) → (?)   3. (A) Λ (?) → (C)
4. (?) γ (C) → (A)   5. (B) γ (?) → (A)   6. (?) Λ (B) → (C)

7.I. (A) < (B), (?)   7.I. (A) < (?), (C)   7.3. (B), (?) γ (A)

7.4 (?), (C) γ (A)

Буквами в скобках обозначены известные по условиям задачи количества, знаком вопроса - неизвестное, знаки γ и Λ обозначают, соответственно, объединение и разделение совокупностей; в вариантах 7.I - 7.4 эти же знаки даны в перевернутом виде, и это должно обозначать, что в условиях предметные преобразования не описываются. Вообще можно сказать, что арифметические выражения в принципе не являются описаниями или отображениями текста условий задач и их предметного смысла, а знаки арифметических операций не являются и не должны быть обозначениями или изображениями предметных преобразований совокупностей.

И все эти принципиальнейшие отличия арифметической системы от алгебраической обусловливаются тем, что в ней нет специальных знаков для обозначения неизвестных количеств; именно из-за этого неизвестные совокупности (в простых задачах это одновременно и искомые) не могут быть отображены в выражении оперативной системы в соответствии с порядком их задания в условиях: первыми в арифметических выражениях могут идти только известные числовые значения, а неизвестное обязательно должно стоять на последнем месте - как то, что получится в результате арифметических преобразований, - совершенно независимо от того, какое место оно занимает в предметных преобразованиях и в тексте условий. Но тогда становится понятным, почему именно для этого способа решения задач (и только для него) приобретает столь важное значение различие между "прямыми" и "косвенными" задачами: первые - это та небольшая группа задач (два варианта из десяти), которые могут быть непосредственно (изоморфным образом) отображены в арифметических выражениях, вторые - большинство задач - это те, которые не могут быть непосредственно отображены в арифметических выражениях и требуют для своего отображения значительно более сложной и опосредованной деятельности.

Именно благодаря этому арифметические знаки + и - не являются и не должны быть обозначениями или изображениями предметных преобразований совокупностей, а несут лишь чисто оперативный смысл, обозначая способ замещения пары чисел третьим. Только непониманием природы арифметической оперативной системы и отсутствием правильных методов обучения можно объяснить то, что обучение решению "прямых" задач отделяется от обучения решению "косвенных", а знаки + и - на первом этапе обучения большинством методистов и учителей трактуются как изображения предметных преобразований. Это неизбежно приводит к неправильной ориентировке детей и очень затрудняет последующее обучение, создавая особую задачу - переучивания.

3. Трудности, встающие перед детьми при переходе от условий "косвенных" задач к выражениям арифметической системы, давно привлекают внимание методистов. Чтобы облегчить и как-то организовать овладение этими переходами, они чаще всего формулируют ряд правил, которые, будучи усвоенными, могут, по их мнению, обеспечить необходимое для переходов "понимание" условий задач. Так например, Д.Д.Галанин, еще в 1910 г. давший глубокий анализ этой проблемы, писал, что "косвенные" задачи должны решать на основе понимания того, что в них даны - один вариант - "сумма двух количеств и одно из них, и, чтобы получить другое, надо первое вычесть из суммы" [52; 64] ; в другом варианте могут быть даны вычитаемое и остаток, и, чтобы получить уменьшаемое, их нужно сложить. Хотя сам Галанин ничего не говорит о тех действиях, которые необходимы для того, чтобы благодаря такому пониманию перейти от условий задачи к нужному арифметическому выражению, их нетрудно реконструировать. Прежде всего, если говорить в традиционной терминологии, ребенок должен будет подвести смысловые элементы условий под категории суммы и слагаемых;

численно неопределенная совокупность будет при этом подведена под категорию одного из слагаемых, и, таким образом, зафиксирована в троичном расчленении. Далее в "игру" вступит правило, что одно слагаемое находится вычитанием другого слагаемого из суммы: на основе его можно будет построить арифметическое выражение и затем произвести необходимые арифметические преобразования.

Нетрудно заметить, что применение категорий суммы и слагаемых или уменьшаемого, вычитаемого и остатка равнозначно введению еще одной оперативной системы, которая ставится как бы между текстом условий задачи и выражениями арифметической системы. В одном отношении эта новая система тождественна алгебраической оперативной системе: она дает знаковые средства для выражения всех совокупностей, описываемых в тексте, - как численно определенных, так и численно неопределенных; но во многих других отношениях она значительно уступает алгебраической.

Во-первых, поскольку все эти категории соотносительны, определить какую-либо совокупность как слагаемое (или сумму) можно только в том случае, если одновременно определяются и все другие совокупности, их место относительно этой троичной взаимосвязи[2]. Схема взаимоотношения "сумма-слагаемые" или "целое-части" как одно целое, как один трафарет "накладывается" на текст условий (или соотносится с ним); чаще всего дело происходит таким образом, что сначала строится эта знаковая структура (трафарет целое-части), а затем к ней относятся различные элементы текста задачи[3]. Но это значит, что текст усло-

---

[2] Вместо категории "сумма-слагаемое" здесь можно употреблять категорию "целое"части", и многие исследователи и методисты пользуются этим, предполагая, что вторая уже известна детям, а первая требует еще специального введения и объяснения. От категории "сумма-слагаемые" категория "целое-части" отличается одним моментом, который мы разбираем ниже; можно сказать, что она более абстрактна, и поэтому мы будем вести дальнейшее рассуждение для нее.

[3] Этот момент крайне важен с более широкой точки зрения. Чаще всего, имея перед собой какую-либо объективную ситуацию или текст описания, мы сначала вводим какую-либо структуру как модель или "трафарет" нужного нам расчленения и по отношению к нему начинаем анализировать эту ситуацию или текст. Очевидно, только такой механизм мыслительной деятельности может обеспечить целенаправленное решение задач. Поэтому можно предположить, что с каждой общественно-фиксированной "задачей" связаны не только формальные оперативные системы, но и определенные структурные модели объектов (см. в этой связи последующий материал).

вий как одно целое должен быть "понят" с точки зрения "выражения" этой новой оперативной системы; поэлементное отображение условий, подобное тому, которое мы имеем при применении алгебраической оперативной системы, здесь полностью исключено.

Во-вторых, при употреблении алгебраической системы мы с самого начала фиксируем неизвестную совокупность как величину, включаем ее в выражение для величин и, вместе с тем, противопоставляем всем другим величинам как известным. При отображении текста условий в структуре "целое-части" или "сумма-слагаемые" различие известных и неизвестных величин сначала вообще не фиксируется: оно является совершенно внешним для этой оперативной системы и начинает учитываться лишь на следующем этапе решения.

В-третьих, в этой оперативной системе совершенно нет знаков для фиксации описываемых в условиях предметных преобразований совокупностей, поэтому ее нужно все время соотносить с условиями задачи, и вне них она не имеет самостоятельного смысла. Именно этим, по-видимому, объясняется то, что Д.Д.Галанин пользуется не понятиями "целого" и "части", а понятиями "суммы" и "слагаемых": он стремится сохранить таким образом представление о характере предметных преобразований, описываемых в условиях задачи[4].

В-четвертых, - и к этому приводят два предыдущих момента - в дальнейшем по ходу решения задачи структура "целое-части" выступает не как формальная оперативная система, а как модель объектов, в которой ребенок должен еще выделить определенные свойства и в соответствии с ними произвести следующее замещение этой структуры определенным арифметическим выражением. Конкретно эта деятельность складывается: сначала из отнесения заданных условиями численных значений к элементам структуры "целое-части", затем из чисто содержательного выяснения, какой из элементов структуры - целое или часть - неизвестен, и, наконец, перехода к арифметическому выражению, производимому в соответствии с правилом типа: "Если неизвестно целое, то надо

---

[4] Нетрудно заметить, что эта предметная компонента смысла не содержится в культурных математических значениях слов "сумма" и "слагаемое", а привносится данным ситуативным употреблением понятий в дополнение к их собственно математическому содержанию и разрушает чистоту этого содержания.

складывать, а если часть – то вычитать".[I]

Введение промежуточных систем такого типа есть единственное, что мы сейчас имеем для перехода от одних знаковых образований к другим, неизоморфным первым (ср. [41]); то, что предлагают другие методисты (С.И.Шохор-Троцкий, В.Латышев, Л.Н.Скаткин), отличается от разобранного по форме, но не в существе дела.

Наглядно-схематически все "шаги" по установлению этой системы отношений можно изобразить так:

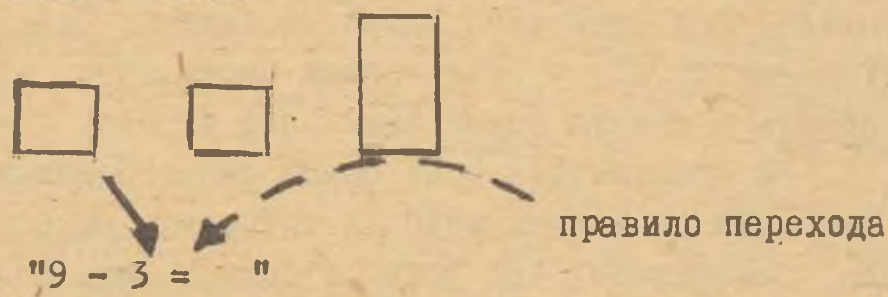
I) "Текст условий"

(введение структуры "целое-части" со стороны – нижняя плоскость, – а затем анализ и соответственно "понимание" текста условий с точки зрения этой структуры);

2) "Текст условий"

(рассмотрение структуры "целое-части" относительно текста условий, направленное на то, чтобы выяснить, какие элементы этой структуры численно определены, а какие нет);

3)



(построение арифметического выражения на основе проведенного раньше отнесения численных значений из текста к элементам структуры "целое-части" и формальных правил образования арифметических выражений в соответствии с выделенным таким путем содержанием).

I Категория "сумма-слагаемые", с одной стороны, не является моделью объектов даже тогда, когда ей придается предметный смысл, а с другой стороны, как мы уже сказали, она несет на себе специфический смысл арифметических выражений и в этом плане выступает как суррогат формальной оперативной системы (но эта сторона дела требует специальных и более детальных исследований).

В задачи этой работы не входит детальный анализ описанной деятельности и необходимых для нее предпосылок. Нам важно сделать только один общий вывод, достаточно подтверждаемый уже изложенным: введение подобных промежуточных оперативных систем при решении арифметических задач, возможно, имеет значение в плане общего развития ребенка - и этот вопрос требует специального исследования, - но как способ решения арифметических задач он не может сравниться с алгебраическим способом - является куда более сложным и громоздким.

4. Но, кроме того, что такой опосредствованный способ решения арифметических задач и сам по себе является очень сложным и громоздким, ему еще неправильно обучают. Рассматривая методические предложения Д.Д.Галанина и др. исследователей, мы представили их как метод введения промежуточных оперативных систем. И с точки зрения сути дела это, на наш взгляд, правильно. Но сами методисты рассматривают свои предложения иначе. У них нет понятия оперативных систем и они не исходят из задачи ввести оперативные системы и обучить детей работать с ними. Наоборот, исходя из представления о мышлении как чисто "умственной" деятельности, они стремятся научить детей "понимать" текст, то есть преобразовывать и перевертывать его в представлении, строить мыслительную деятельность "в уме" на основании правил и т.п. Фактически все они убеждены в том, что если детям дать правила, подобные тем, какие предлагает Д.Д.Галанин, то они легко усвоят их, и этого будет достаточно, чтобы научиться понимать и решать самые различные задачи.

Но многолетний опыт самых разнообразных исследований и проверки различных методик обучения, основанных на этом принципе, показывает, что дети в подавляющем большинстве с большим трудом усваивают эти правила, а усвоив, тем не менее, очень часто не понимают текста условий (не преобразовывают его "в уме") и не умеют решать задачи.

На наш взгляд, это вполне естественно. Научиться "понимать" текст условий задачи - это значит научиться переходить от него к какой-либо оперативной системе, обеспечивающей решение задачи. Но как можно научиться это делать, если оперативные системы даются не как таковые, не в своей объективной форме, а в извращенном виде, как правила деятельности?

Научиться преобразовывать текст условий задачи в представлении это значит научиться в представлении замещать его определенными структурами-моделями и производить с ними необходимые для дальнейшего движения действия. Но как можно научиться это делать, если соответствующие замещения и преобразования не отрабатываются предварительно в объектном плане?

Дополнительные данные, выявленные при анализе "способа предметного моделирования и счета"

1. Определяющая роль оперативных систем в процессах решения задач, в частности их влияние на "понимание" текста условий, особенно отчетливо выступила при анализе процессов решения простых арифметических задач способом "предметного моделирования и счета". К этому способу решения задач прибегает подавляющее большинство детей, не обученных еще арифметическому сложению и вычитанию. Когда этим детям начинают давать собственно арифметические задачи, то ставят их, по существу, в ситуацию разрыва: решение задач требует нового способа деятельности, которого у детей еще нет.[6] Естественно, что в этой ситуации они пытаются приспособить к новым условиям прежние, уже усвоенные ими способы деятельности, в частности - счет. Но для этого от численно заданных арифметических задач нужно перейти к задачам, заданным в предметной форме (см. [37] [42]), надо дополнить задачу предметными совокупностями. И дети делают это, вводя вспомогательные предметы (чаще всего, это пальцы рук); они восстанавливают в этих предметах совокупности, численные значения которых заданы в условиях, при этом устанавливают между этими совокупностями такие отношения, которые позволили бы воссоздать в предметной форме третью, неизвестную совокупность и путем пересчета определить ее числовую характеристику. Теоретический анализ деятельности при использовании этого способа решения был уже изложен нами в другом месте (см. [37] [42; 223-252]), и мы не будем здесь повторять его; нам важно подчеркнуть лишь ряд моментов, которые там не были затронуты и имеют непосредственное отношение к обсуждаемому сейчас вопросу.

---

6 Здесь надо заметить, что арифметическое решение задач не сводится к одним лишь операциям сложения и вычитания: наблюдения показывают (см., в частности, [42; 240]), что дети, хорошо умеющие решать арифметические примеры, тем не менее не могут решать многих задач; следовательно, в ситуацию разрыва при "столкновении" с арифметическими задачами попадают и те дети, которые уже овладели операциями сложения и вычитания.

Эксперименты с учащимися первых классов, проведенные в ряде школ в первой половине учебного года (сентябрь-декабрь), с очевидностью показали, что для детей, пользующихся предметным моделированием, не существует проблемы "косвенных" задач. Особенно резко это выступает в шестом варианте задач /его схема: $(?) \wedge (B) \longrightarrow (C)$ /: в нашем исследовании ни один ребенок, освоивший, пусть даже плохо, предметное моделирование, не допустил ошибок в решении относящихся к нему задач. Достаточно ярким является и пятый вариант; его легко решает подавляющее большинство детей, и, кроме того, анализ строения их деятельности убедительно говорит, что при том способе, какой применяется при решении задач этого варианта, и не может быть такой проблемы: задачи решаются добавлением т.е. присчетом до числа, характеризующего целое, и при этом, – в полном соответствии со "смыслом" условий. Четвертый вариант задач /$(?) \gamma (C) \longrightarrow (A)$ / вызывает затруднения у многих детей, но совершенно иного характера, чем у детей, пользующихся арифметическим способом решения.

Самым поразительным, однако, обстоятельством явилось то, что <u>дети, умевшие решать задачи этого вида путем предметного моделирования и, следовательно, прекрасно "понимавшие" их, впоследствии, когда от них стали требовать решения арифметическим способом, перестали решать эти задачи и "понимать" текст этих же условий</u>.

Этот результат, выявленный в экспериментах и наблюдениях, не может быть объяснен с традиционной точки зрения. Для нас же, в свете введенных выше понятий, он является совершенно естественным и закономерным. Ведь само то затруднение в "косвенных" задачах, которое мы разбирали выше, возникает только тогда, когда нужно выбрать арифметические операции сложения и вычитания, "понять" условия задачи именно с этой точки зрения, выделить в них то содержание, которое обеспечивает выбор этих действий. А при предметном моделировании такого "понимания" не нужно.

Важно также отметить, что при экспериментальном изучении решений задач способом предметного моделирования и счета мы не обнаружили у детей <u>никаких ассоциативных связей</u> – правильных и неправильных – <u>между математическими знаками "плюс" и "минус" и словесными выражениями, обозначающими предметные действия типа "объединить-разделить" или "увели-</u>

чить-уменьшить". У детей не обнаружилось также никакой тенденции устанавливать подобные связи. Особенно показательны в этом отношении задачи седьмого варианта (см. [42; 282-283]). Учащиеся первых классов, владеющие предметным моделированием, одинаково легко решали задачи второго варианта, в которых есть слова, указывающие на предметные преобразования, и задачи седьмого варианта, в которых таких слов нет. И это тоже вполне естественно, так как в том способе решения, каким пользуются здесь дети, подобные ассоциативные связи не нужны.

Но тогда мы вправе спросить: почему "малопродвинутые" по сравнению с остальными (или "отстающие") дети очень хорошо выделяют и "понимают" тот "математический смысл" косвенных задач, который обеспечивает им правильное решение их путем предметного моделирования, а когда их начинают "развивать" дальше, когда им дают, казалось бы, более высокие способы решения путем арифметического сложения и вычитания, они начинают систематически ошибаться в косвенных задачах, перестают "понимать" их смысл. И помимо того теоретического вывода, который мы уже сделали выше, - что "понимание" условий задачи полностью определяется "способом решения", мы должны сделать еще и практический вывод; очевидно детей учат ложным способам решения задач, связанным с ориентировкой на слова "объединили-разделили", "увеличили-уменьшили": здесь возможны два варианта: либо педагоги обучают детей недостаточно хорошим (практически - ложным) способам решения, либо дети сами "вырабатывают" их, так как педагоги не дают другого более верного способа решения задач. Но, в обоих случаях это - вина педагогики.

2. Еще резче различие "пониманий" при разных способах решения выступило в экспериментах с дошкольниками. Более того, в этих экспериментах отчетливо обнаружилась сторона, которую не удавалось выявить при анализе деятельности школьников: зависимость "понимания" (и процесса решения) от тех оперативных систем, на основе которых строится способ решения. Мы уже говорили выше (см. также [42; 223-230]), что способ "предметного моделирования" строится на основе двух оперативных систем: а) числового ряда с операциями пересчета и отсчета, б) разделения целого на части и объединения частей в целое. У учащихся первых классов с которыми мы проводили

эксперименты, он уже сформировался и выступал как одно целое. Когда же мы "спустились вниз", к дошкольникам, и стали экспериментировать с ними, то у многих увидели этот способ в становлении, в динамике складывания его, и получили отчетливые примеры решений, опирающихся то на одну, то на другую из названных оперативных систем.

Одни процессы решения строятся на основе числового ряда. Восстановление моделирующих совокупностей начинается в этих случаях, как правило, с меньшего числа и идет к большему; объединение совокупностей или добавление выступает как продолжение счета. Вот характерные примеры.

Ира К. 6; 8 – второй вариант задач

Эксп. Было 5 конфет, 2 конфеты съели. Сколько осталось?

Ира. (Отсчитывает 2 кубика, потом продолжает счет, откладывая кубики в другую кучку). 3, 4, 5. (Глазами пересчитывает вторую кучку). 3.

Таня К. 6; 8 – третий вариант задач

Эксп. Было 12 карандашей. Несколько потеряли и осталось 4. Сколько потеряли?

Таня. (Отсчитывает 4 кубика, потом выкладывает рядом вторую кучку, продолжая отсчет до 12. Пересчитывает вторую кучку). 8.

Таня З. 6; 6 – седьмой (первый) вариант задач

Эксп. У девочки 8 чашек, большие и маленькие. Больших 3, а сколько маленьких?

Таня. 3 больших? (Отсчитывает 3 кубика, и продолжает отсчет, откладывая в другую кучку рядом). 4, 5, 6, 7 (смотрит на них). 4 маленьких.

Эксп. Посчитай снова.

Таня. (Повторяет всю процедуру, досчитывает до 8, пересчитывает вторую кучку). 5.

Когда дети "свободно" владеют числовым рядом и могут двигаться по нему и в обратном порядке, тогда становится возможной имитация разделения совокупностей – она выступает как обратный счет от больших чисел к меньшим (мы получили примеры подобных решений задач у школьников).

Другая группа решений строится на основе оперативной системы "целое-части", т.е. системы, воспроизводящей разделения и объединения совокупностей. Самое характерное здесь то, что восстановление объединяемых совокупностей расходится с определением их точной количественной характеристики: дети восстанавливают одну из совокупностей условно, не имея характеризующего её числа, они создают модель совокупности (безотносительно к ее числовой определенности), чтобы воспроизвести отношения между совокупностями, и лишь затем на основе предметно заданных моделей этих отношений вводят необходимые количественные определения совокупностей. Вот примеры.

Ванда М. 6; 6 - третий вариант задач

Эксп. У мальчика I3 карандашей. Он подарил несколько ребятам и оставил себе 5. Сколько он подарил?

Ванда. (Отсчитывает I3 кубиков, от них, отсчитывая, отделяет 6, пересчитывает оставшуюся кучку до 5, два лишних кубика передвигает в первую кучку и пересчитывает). 8.

Виталик М. 6; 4 - седьмой (первый) вариант задач

Эксп. Было 8 чашек, 3 больших, а остальные - маленькие. Сколько было маленьких?

Виталик. (Отсчитывает 3 кубика, потом рядом, начав счет снова, откладывает 3 кубика, добавляет еще один, не считая. Пересчитывает все вместе). 7. (Добавляет еще один кубик во вторую кучку, снова все пересчитывает). 8. (Пересчитывает вторую кучку). 5.

Нетрудно заметить, что подобный порядок процесса решения воспроизводит в общих чертах, хотя и в другой форме, алгебраическую схему решения задач.

Различие описанных способов решения можно проследить у дошкольников и на всех других вариантах задач. Мы привели здесь лишь те примеры, которые отчетливо раскрывают интересующую нас сейчас сторону дела: зависимость "понимания" текста условий от применяемой оперативной системы. Нам важно, что во всех приведенных примерах, как при одном способе, так и при другом, "логика" решения расходится с "логикой" текста условий. Особенно разительно это выступает в примере на второй вариант задач. Столкнувшись со столь простой и легкой, казалось бы, задачей, ребенок (и притом - очень "слабый") производит то самое (на первый взгляд) "перевертывание" или преобразование текста условий, которого не могут осуществить другие дети, значительно более развитые, когда им нужно решать задачи собственно арифметическим способом. С нашей точки зрения, это совершенно естественно, так как всякое "понимание" текста условий соотносительно с оперативной системой, образующей ядро способа решения. Ребенок владеет числовым рядом, если он умеет в движениях по нему выражать различные ситуации и это выступает как "понимание" этих ситуаций в том числе заданных текстом условий, но всегда - как "понимание" только относительно числового ряда как оперативной системы. Когда же мы переходим к другой оперативной системе, например, арифметической, то требуется уже иное "понимание", соотносительное с новой системой.[7] Эта сторона дела отчетливо выступает и в примерах решений задач на основе оперативной системы "целое-части". Если, скажем, решение задач третьего варианта на основе одного лишь числового ряда предполагает "перевертывание" условий, то решение этих задач на основе системы "целое-части", напротив, идет в точном соответствии с последовательностью текста условий, а дальнейшее определение количества опирается уже не на текст и его "понимание", а на реальную предметную заданность совокупностей и отношений между ними. Аналогичное отличие, хотя и менее выраженное, можно найти и в решениях задач других вариантов. Таким образом, экспериментальные данные полностью подтверждают тезис о том, что "понимание" текста условий задач зависит от характера и типа той оперативной системы, на основе которой строится решение.

О генетических отношениях между "способами решения" с точки зрения развития ребенка

Проведенный выше логический анализ с очевидностью показывает, что между тремя выделенными нами способами решения арифметических задач, взятыми как целое, не существует непосредственной преемственности: "алгебраический" способ нельзя рассматривать как усложнение (или как "развитие", понимание в этом смысле) "арифметического" способа решения, а последний - как усложнение (развитие) способа предметного моделирования; каждый из них основан на особой оперативной системе, которая вводится обучающим как бы "со стороны" и предполагает свои особые переходы от условий задач к оперативной системе.

---

7 Мы не обсуждаем сейчас вопрос, могут ли существовать обобщенные "понимания", связанные с целым рядом различных оперативных систем; он будет затронут - хотя и очень кратко - ниже.

Более того, оказалось, что с точки зрения процессов перехода от текста условий к выражениям оперативной системы алгебраический способ решения задач значительно проще, чем арифметический, и требует от ребенка значительно меньшей изощренности.

Вместе с тем, логический анализ показывает, что названные способы решения арифметических задач имеют целый ряд общих предпосылок, в частности, отношение "целое-части" (см. [42]), понятия "величины" и "меры", операцию "счета" и др. Поэтому между ними может существовать более сложная связь - по предпосылкам или, иначе, по тем "способностям, которые должны складываться и "работать" при овладении этими способами решения задач. Анализ подобных связей предполагает, кроме логического анализа самих норм деятельности, еще психологический анализ "способностей" и законов их развития при усвоении различных оперативных систем (см. [40] [45]). В частности, требуют специального исследования: а) условия, при которых дети принимают и включают в свою деятельность отдельные замещающие средства (модели и символы), а в дальнейшем и целые оперативные системы; б) структуры собственно психической деятельности, которые складываются при усвоении замещающих средств; в) механизмы и средства построения различных деятельностей на основе "способностей", приобретенных при развивающем обучении; г) механизмы и средства "понимания" различных знаковых образований и возможная преемственность "пониманий" при переходе от одних оперативных систем к другим.

И решение всех этих проблем - здесь мы возвращаемся к тому, с чего начинали, - требует значительно более тесной связи между психологией и логикой, чем та, которая существовала до сих пор.

Литература

1. Д.М.Бодуин. Духовное развитие детского индивидуума и человеческого рода. Методы и процессы. Т. 1-2, СПб, 1911-1912.

2. J. Boldwin. Thought and Things, or genetic Logic. V. 1-3 London. 1906-1911

3. В.Вундт. Основания физиологической психологии. Т. 1-2, СПБ, 1880-1881.

4. В.Вундт. Естествознание и психология. СПБ. 1914.

5. Н.Н.Ланге. Психология. Основные проблемы и принципы. М., 1914.

6. E.L. Thorndike. Educational psychologu. N-Y. 1903

7. E. Husserl. Logische Untersuchungen. Bd. 1-2, 1900-1901.

8. Э.Гуссерль. Логические исследования. Т. I, СПБ, 1909.

9. L.S. Vygotsky The problem of cultural development of child. II, - The padagogical Seminar and Journal of genetic Psychologie." v; XXXVI, 1929, № 3

10. Л.С.Выготский. Мышление и речь. М.Л., 1934.

11. П.И.Зинченко. Проблема непроизвольного запоминания. "Научные записки Харьковского государственного педагогического института иностранных языков", том I, 1939.

12. П.Я.Гальперин. Развитие исследований по формированию умственных действий. - "Психологическая наука в СССР", т. I, М., 1960.

13. Г.П.Щедровицкий. Проблема соотношения логических и психологических исследований мышления в истории советской психологии. - "материалы IУ Всесоюзного съезда Общества психологов". Тбилиси, 1971.

14. J. Piaget. Logique génétique et sociologie." Revue philosophique de la France et de l'Etranger; vol CV 1928

15. J. Piaget. Classes, relations et nombres. Essai sur les groupements de la logistique et sur la réversibilité de la pensée. Paris 1942.

16. Ж.Пиаже. Психология интеллекта. - "Избранные психологические труды", М., 1969.

17. Ж.Пиаже. Логика и психология. - Там же.

18. Ж.Пиаже, Б.Иннельдер. Генезис элементарных логических структур. Классификация и сер ции. М., 1963.

19. В.Н.Садовский. Психология мышления и математическая логика. - "Тезисы докладов на П съезде Общества психологов", вып. 2, М., 1963.

20. Н.И.Непомнящая. О связи логики и психологии в системе Ж.Пиаже. - "Вопросы философии", 1965, № 4.

21. П.Я.Гальперин, Д.Б.Эльконин. К анализу теории Ж.Пиаже о развитии детского мышления. - Послесловие к книге: Д.Х.Флейвел. Генетическая психология Ж.Пиаже. М., 1967.

22. В.Н.Садовский, Э.Г.Юдин. Ж.Пиаже - психолог, логик, философ. - "Вопросы психологии", 1966, № 4.

23. В.А.Лекторский, В.Н.Садовский, Э.Г.Юдин. Операциональная концепция интеллекта в работах Ж.Пиаже - Вступительная статья в книге: Ж.Пиаже. Избранные психологические труды. М., 1969.

24. „Etudes d'épistémologie génétique" vol. 1 - Paris, 1957.

25. В.В.Давыдов. К определению умственного действия. - "Тезисы докладов на I съезде Общества психологов", Вып. 3, М., 1959.

26. "Вопросы психологии учебной деятельности младших школьников", под. ред. Д.Б.Эльконина и В.В.Давыдова. М., 1962.

27. "Возрастные возможности усвоения знаний младшие классы школы", под ред. Д.Б.Эльконина и В.В.Давыдова. М., 1966.

28. В.В.Давыдов. Категории логики и педагогики. - "Проблемы диалектической логики. Материалы к симпозиуму". Алма-Ата. 1968.

29. "Психологические возможности младших школьников в усвоении математики", под ред. В.В.Давыдова, М., 1969.

30. В.В.Давыдов. О возможности применения диалектической логики при решении психолого-дидактических проблем. - "Оптимизация процесса обучения в высшей и средней школе", Душанбе, 1970.

31. В.В.Давыдов. Виды обобщения в обучении, М., 1972.

32. Г.П.Щедровицкий, Н.Г.Алексеев. О возможных путях исследования мышления как деятельности. - "Доклады АПН РСФСР", 1957, № 3.

33. Г.П.Щедровицкий, И.С.Ладенко. О некоторых принципах генетического исследования мышления. - "Тезисы докладов на I съезде Общества психологов", вып. I, М., 1959.

34. Г.П.Щедровицкий. О различии исходных понятий формальной и содержательной логик. - "Проблемы методологии и логики наук", Томск, 1962.

35. Г.П.Щедровицкий. К анализу процессов решения задач. "Доклады АПН РСФСР", 1960, № 5.

36. Г.П.Щедровицкий, Н.Г.Алексеев, В.А.Костеловский. Принцип "параллелизма формы и содержания мышления" и его значение для традиционных логических и психологических исследований. Сообщения I-IУ. Доклады АПН РСФСР, 1960, № 2, 4; 1961, №№ 4, 5.

37. Г.П.Щедровицкий, С.Г.Якобсон. К анализу процессов решения простых арифметических задач. Сообщения IУ. "Доклады АПН РСФСР", 1962, №№ 2-6.

38. "Тезисы докладов на II съезде Общества психологов", вып. 2, М., 1963. Раздел "Роль логического анализа в решении проблем психологии обучения", стр. 162-187.

39. Г.П.Щедровицкий. О принципах анализа объективной структуры мыслительной деятельности на основе понятий содержательно-генетической логики. "Вопросы психологии", 1964, № 2.

40. Г.П.Щедровицкий. О месте логических и психологических методов в педагогической науке. "Вопросы философии", 1964, № 7.

41. В.А.Лефевр и В.И.Дубовская. "Способ решения" задач как содержание обучения. "Новые исследования в педагогических науках", сб. IУ, М., 1965.

42. Г.П.Щедровицкий. Исследование мышления детей на материале решений арифметических задач. В сб. "Развитие познавательных и волевых процессов у дошкольников", М., 1965.

43. "Педагогика и логика", под ред Г.П.Щедровицкого и Б.В.Сазонова, М., 1968 на правах рукописи.

44. С.Г.Якобсон и Н.Ф.Прокина. Организованность и условия ее формирования у младших школьников экспериментальное исследование. М., 1967.

45. Г.П.Щедровицкий. О системе педагогических исследований методологический анализ. - "Оптимизация процесса обучения в высшей и средней школе", Душанбе, 1970.

46. Г.П.Щедровицкий. О методе семиотического исследования знаковых систем. - "Семиотика и восточные языки", М., 1967.

47. А.А.Зиновьев. Метод восхождения от абстрактного к конкретному на материале "Капитала" К.Маркса. Канд.диссертация,МГУ, 1954.

48. A. Zinovév. K problému abstraktního a konkrétního poznatcu. - „Filosofický Časopis" 1958, №2.

49. T. Kuhn. The Structure of Scientific Revolutions 1962.

50. G. Stschedrovitzki. Die Struktur des Zeichens: Sinn und Bedeutung. „Ideen des exakten Wissens. Wissenschaft und Technick in der Sowjetunion," 1972, №12.

51. Г.П.Щедровицкий, С.Г.Якобсон. Заметки к определению понятий "мышление" и "понимание". - "Мышление и общение. Материалы всесоюзного симпозиума". Алма-Ата, 1973.

52. Д.Д.Галанин. Методика арифметики. Первый год обучения. М., 1910.